Université Paris-Sud **Travaux pratiques**
L3 Mathématiques **2012-2013**
M315 - Calcul Scientifique

Devoir Surveillé - 27 février 2013

(Durée : 2h00)

TRÈS IMPORTANT - Consignes :

- La consultation de documents de cours et de TP, ainsi que des précédents travaux réalisés par vous en TP, est autorisée. *La consultation de pages Internet, en particulier de votre messagerie électronique, est interdite. Le non respect de cette règle entraînera l'annulation de votre note.*

- Commencez par créer, avec la commande `mkdir`, un répertoire `M315_DS2_###` où `###` est votre NOM. Travaillez dans <u>ce</u> répertoire. En particulier, si vous souhaitez utiliser des fichiers enregistrés dans d'autres répertoires, recopiez-les.

- Lorsque la réponse à une question nécessite des commentaires rédigés, vous devez mettre ces commentaires dans vos fichiers en utilisant le symbole %.

- A la fin de l'examen, vous devez envoyer, selon votre groupe de TP, votre répertoire `M315_DS2_###` par mail à l'une des adresses suivantes :
– `jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr` (groupe 1),
– `filipa.caetano@math.u-psud.fr` (groupe 2),
– `guilhem.lepoultier@math.u-psud.fr` (groupe 3),
– `nicolas.salles@math.u-psud.fr` (groupe 4).
Si vous avez le moindre doute sur la réussite de cette procédure, n'hésitez pas à demander de l'aide à l'enseignant de votre salle.

Exercice 1[Calcul approché d'intégrales - régularité versus vitesse de convergence]
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = |2x^4 - 1|$. On souhaite approcher $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ par la méthode de Simpson.

1. Représenter graphiquement la fonction f dans l'intervalle $[0,1]$.
2. Calculer à la main (ou en utilisant `Matlab` comme une calculatrice) I.
3. Calculer successivement les valeurs approchées I_n que donne la méthode de Simpson avec une subdivision de $[0,1]$ en $n = 2^m$ intervalles, avec $m = 2,\dots,12$. Soit $h_n = \frac{1}{n}$ le pas de la subdivision et $E_n = |I - I_n|$ l'erreur commise. Afficher les valeurs h_n, E_n, $E_n/{h_n}^2$ et $E_n/{h_n}^4$.
   Représenter dans 3 figures différentes E_n, $\frac{E_n}{{h_n}^2}$ et $\frac{E_n}{{h_n}^4}$, en fonction de h_n. Représenter également dans une autre figure les points $(\ln(h_n), \ln(E_n))$, puis ajouter sur la figure le tracé de la droite de pente 2 passant par le dernier de ces points. Que peut-on dire sur la vitesse de convergence de la suite I_n ? Ce résultat était-t-il attendu ? Justifier la différence obtenue par rapport au comportement habituel de l'erreur en $O(h^4)$.
4. Tracer à nouveau le même type de courbes que dans la question précédente (en faisant les ajustements qui vous semblent convenables), mais en écrivant maintenant
   $$I = \int_0^z f(x)\,dx + \int_z^1 f(x)\,dx,$$
   où $z = 2^{-\frac{1}{4}}$, et en approchant les deux intégrales sur $[0,z]$ et sur $[z,1]$ par la formule de Simpson ayant comme base une subdivision de chacun de ces intervalles en $n/2$ sous-intervalles, pour les mêmes valeurs de n que dans la question précédente. Pour ce faire, remarquer que l'on considère alors une subdivision de $[0,1]$ en n sous-intervalles et que, si $I1_{\frac{n}{2}}$ est la correspondante valeur

approchée de $I1 = \int_0^z f(x)\,dx$ et $I2_{\frac{n}{2}}$ la valeur approchée de $I2 = \int_z^1 f(x)\,dx$, alors $I_n = I1_{\frac{n}{2}} + I2_{\frac{n}{2}}$ est la valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $E_n = |I1 - I1_{\frac{n}{2}}| + |I2 - I2_{\frac{n}{2}}|$.
Qu'observe-t-on ? Commenter.

Exercice 2[La méthode de Newton en $\mathbb{R}^2$]
L'objectif de cet exercice est de calculer les points d'intersection de deux courbes en utilisant la méthode de Newton.

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^2. Supposons que F admet un unique zéro (a, b) dans D.

La **méthode de Newton** pour approcher le zéro de F consiste à choisir $X_0 = (x_0, y_0) \in D$ et à définir (tant que c'est possible) la suite $(X_n = (x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$X_{n+1} = X_n - \big(DF(X_n)\big)^{-1} F(X_n), \quad n \geq 0,$$

où $DF(X_n)$ est la matrice jacobienne de F au point X_n. On montre que, si $DF(a, b) \neq 0$ et si X_0 est choisi suffisamment proche de (a, b), alors la suite X_n est bien définie et converge vers (a, b).

La courbe d'équation

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

peut se paramétrer à l'aide du paramètre $t = \frac{y}{x}$ par les équations

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Cette courbe intersecte la courbe d'équation $y = \cos(x)$ en 3 points du plan. On se propose de calculer ces points par la méthode de Newton.

1. Écrire ce problème d'intersection des deux courbes sous la forme $F(x, y) = (0, 0)$, où $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction à déterminer.
2. Définir dans des fonctions Matlab de la forme `Y=F(X)` et `Y=DF(X)` la fonction F ainsi que sa jacobienne.
3. Adapter la fonction `Newton` que vous avez programmé au TP3 au cas multidimensionnel et l'utiliser pour obtenir des valeurs approchées des 3 points d'intersection des deux courbes, avec une précision de 10^{-8}. Représenter graphiquement les deux courbes ainsi que les points obtenus par la méthode de Newton.