Université Paris-Sud
L3 Mathématiques
M315 - Calcul Scientifique

Travaux pratiques
2012-2013

Devoir Surveillé - 6 février 2013
(Durée : 1h30)

TRÈS IMPORTANT - Consignes :

- La consultation de documents de cours et de TP, ainsi que des précédents travaux réalisés par vous en TP, est autorisée. *La consultation de pages Internet, en particulier de votre messagerie électronique, est interdite. Le non respect de cette règle entraînera l'annulation de votre note.*

- Commencez par créer, avec la commande `mkdir`, un répertoire `M315_DS1_###` où `###` est votre NOM. Travaillez dans <u>ce</u> répertoire. En particulier, si vous souhaitez utiliser des fichiers enregistrés dans d'autres répertoires, recopiez-les.

- Lorsque la réponse à une question nécessite des commentaires rédigés, vous devez mettre ces commentaires dans vos fichiers en utilisant le symbole %.

- A la fin de l'examen, vous devez envoyer, selon votre groupe de TP, votre répertoire `M315_DS1_###` par mail à l'une des adresses suivantes :
– `jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr` (groupe 1),
– `filipa.caetano@math.u-psud.fr` (groupe 2),
– `guilhem.lepoultier@math.u-psud.fr` (groupe 3),
– `nicolas.salles@ensta.fr` (groupe 4).
Si vous avez le moindre doute sur la réussite de cette procédure, n'hésitez pas à demander de l'aide à l'enseignant de votre salle.

La méthode de Newton et la méthode de la sécante

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Supposons que f admet un unique zéro c dans I. Nous étudions dans cet exercice deux méthodes pour approcher numériquement la valeur de c.

La **méthode de Newton** consiste à choisir $x_0 \in I$ et à définir (tant que c'est possible) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n \geq 0.$$

On montre que, si $f'(c) \neq 0$ et si x_0 est choisi suffisamment proche de c, alors la suite x_n est bien définie et converge vers c.

La **méthode de la sécante** consiste à choisir $\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_1 \in I$ et à définir (tant que c'est possible) la suite $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{f(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_{n-1})} f(\tilde{x}_n), \;\; n \geq 1.$$

On montre que, si $f'(c)f''(c) \neq 0$ et si $\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_1$ sont choisis suffisamment proche de c, la suite $\tilde{x}_n$ converge vers c.

Exercice 1.
L'objectif de cet exercice est de programmer les deux méthodes décrites ci-dessus pour calculer une valeur approchée d'un zéro d'une fonction f.

1. Écrire une fonction Matlab `[c,X,N]=newton(f,df,x0,prec,Nmax)` qui calcule une solution approchée `c` de `f`$(x) = 0$ par la méthode de Newton. Les arguments d'entrée de la fonction `newton`

sont la fonction `f`, sa dérivée `df`, le point `x0` d'initialisation de la suite (x_n), la précision voulue `prec` et le nombre maximal d'itérations autorisées de l'algorithme `Nmax`. En sortie, `c` est la valeur approchée de la solution obtenue à la fin de `N` itérations de l'algorithme et `X` est un vecteur contenant les `N` premiers termes de la suite x_n. On arrêtera l'algorithme si $|f(x_n)| \leq$ `prec` ou si $n =$ `Nmax`.

2. Écrire une fonction Matlab `[c,X,N]=secante(f,x0,x1,prec,Nmax)`, à l'image de la fonction `newton`, qui calcule une solution approchée `c` de $\mathtt{f}(x) = 0$ par la méthode de la sécante. En entrée on doit maintenant considérer les deux points pour l'initialisation de la suite $\tilde{x}_n$, `x0` et `x1`.

Exercice 2.
L'objectif de cet exercice est de comparer les méthodes de Newton et de la sécante pour calculer un zéro de la fonction $g(x) = x\tan(x) - 1$.

1. La fonction g admet un unique zéro dans l'intervalle $I = [\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{12}]$. Représenter graphiquement g dans I, ainsi que la droite $y = 0$ et constater sur le graphique l'existence d'un unique zéro de g dans cet intervalle.
2. Soit $\tilde{x}_0 = \frac{9\pi}{24}$ et $\tilde{x}_1 = \frac{\pi}{3}$. Calculer le troisième terme de la suite de la méthode de la sécante $\tilde{x}_2$. Représenter sur le même graphique de la question 1.) les points $(\tilde{x}_0, f(\tilde{x}_0))$, $(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1))$ et $(\tilde{x}_2, 0)$, en les marquant avec le symbole `*` en rouge. Représenter ensuite le segment de droite joignant $(\tilde{x}_0, f(\tilde{x}_0))$ et $(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1))$ et le segment de droite joignant $(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1))$ et $(\tilde{x}_2, 0)$. Comment peut-on interpréter géométriquement le point $\tilde{x}_2$?

Dans la suite on cherchera à calculer une solution approchée `c` de la solution de $g(x) = 0$ dans I, vérifiant $|g(\mathtt{c})| \leq 10^{-15}$, et on fixera `Nmax`=100.

3. Commencer par définir dans votre programme la fonction g, ainsi que sa dérivée, que l'on appellera dg.
4. Utiliser la méthode de Newton pour calculer une valeur approchée, que l'on notera `cN`, du zéro de g dans I, en initialisant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = \frac{9\pi}{24}$.
5. Soit $\tilde{x}_0 = x_0 = \frac{9\pi}{24}$. Calculer x_1, le premier terme de la suite de le méthode de Newton initialisée par x_0, et prendre $\tilde{x}_1 = x_1$. Utiliser la méthode de la sécante pour calculer une valeur approchée, que l'on notera `cS`, du zéro de g dans I, en initialisant la suite $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}_1$.
6. Afficher à l'écran les valeurs `cN` et de `cS` obtenues, ainsi que leurs images $g($`cN`$)$ et $g($`cS`$)$ et le nombre d'itérations des deux algorithmes effectuées, en respectant le format suivant :
```
Newton : cN=0.8603335890193797 ; Secante : cS=0.8603335890193798
g(cN) vaut 2.2204e-16 et g(cS) vaut -1.1102e-16
Newton : 6 itérations ; Secante : 8 itérations
```
7. On notera `N_N` et `N_S` l'ordre des derniers termes des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ calculés. On prend pour c sa valeur approchée calculée par la méthode de Newton, c'est-à-dire $c =$ `cN`. Calculer et représenter graphiquement dans 3 figures différentes les suites suivantes :

$$eN = \frac{|x_n - c|}{(x_{n-1} - c)^2}, \; n = 1, \ldots, \mathtt{N\_N} - 1,$$
$$eS1 = \frac{|\tilde{x}_n - c|}{|\tilde{x}_{n-1} - c|}, \; n = 1, \ldots, \mathtt{N\_S} - 1,$$
$$eS2 = \frac{|\tilde{x}_n - c|}{(\tilde{x}_{n-1} - c)^2}, \; n = 1, \ldots, \mathtt{N\_S} - 1.$$

Que peut-on en déduire sur l'ordre de convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas concret de cet exemple ?