© *Jean-Baptiste APOUNG KAMGA <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>*

# *Exercices d'entraînement*

**Thème -** 1 *Interpolation polynomiale : Apprentissage du cours*

**Exercice-1-1 : Familiarisation avec le résultat principal du cours**

Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a, b]$ et de classe $C^n$ sur cet intervalle. On désigne par $P_n$ son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points d'abscisse $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distincts. Et on pose $\mathcal{E}_n(x) = f(x) - P_n(x)$ l'erreur d'interpolation polynomiale correspondante.

Montrer qu'on a l'estimation :

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b], \exists t_x \in ]a, b[ \quad \text{tel que} \\ \mathcal{E}_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \dfrac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \end{cases} \tag{1}$$

**Exercice-1-2 : Calcul à la main des polynômes d'interpolation**

On se place dans le cas particulier suivant :

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = \frac{4}{x}, \\ a = 1,\ b = 4, \\ n = 2, x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4 \end{array} \right. \tag{2}$$

**Q-2-1 :** En effectuant les calculs à la main, donner l'expression de $P_2$. On l'écrira suivant les puissances croissantes de ses monômes. (*On parle alors d'écriture dans la base canonique de* $R_2[X]$).

*On fournira deux approches : l'une par la base de Lagrange et l'autre utilisant les différences divisées. On comparera alors les efforts de calcul des deux approches.*

**Q-2-2 :** Donner l'expression de $\mathcal{E}_2(x) = f(x) - P_2(x)$.

**Q-2-2-1 :** En déduire, pour tout $x \in [1, 4]$, l'expression de $t_x$ présente dans la formule (1).

**Q-2-2-2 :** Quantifier pour ce problème les apports de $(x-1)(x-2)(x-4)$ et $\frac{f^{(3)}(t_x)}{3!}$ dans l'erreur $\mathcal{E}_2(x)$.

**Q-2-3 :** Montrer que $\mathcal{E}_2$ atteint sa valeur maximale en un point $\tilde{x}$ sur $[2, 4]$.

**Q-2-4 :** Montrer que $\tilde{x}$ est racine de $g(x) = \frac{7}{2} - x - \frac{4}{x^2}$.

**Q-2-5 :** Montrer que $g$ est injective sur $[2, 4]$. En déduire que $g^{-1}(0)$ existe et comparer $\tilde{x}$ et $g^{-1}(0)$.

**Exercice-1-3 : Exemple d'utilisation de l'interpolation polynomiale**

On souhaite utiliser les polynômes d'interpolation de $g^{-1}$ pour déterminer $\tilde{x}$.

**Q-3-1 :** On pose $y_0 = g(2)$, $y_1 = g(4)$. Donner l'expression de $q_1(y)$, polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(y_0, 2), (y_1, 4)$. (*Attention à la position des abscisses dans ces coordonnées !*).

**Q-3-2 :** Calculer $q_1(0)$ et montrer que c'est une approximation de $\tilde{x}$.
On estimera l'erreur en fournissant une majoration de $|\tilde{x} - q_1(0)|$.
*(Attention, il sera question de majorer la dérivée seconde de la réciproque d'une fonction!)*
*(On pourra se servir des représentations graphiques, pour estimer les majorants)*

**Q-3-3 :** Fort du résultat précédent, on construit la suite $(x_n)_n$ d'approximation de $\tilde{x}$ par la formule

$$\begin{cases} x_0 = 2, x_1 = 4 \\ \forall n = 1, \dots \\ \qquad x_{n+1} = q_n(0), \text{ avec } q_n \text{ le polynôme interpolateur aux points } (g(x_i), x_i), i = 0, \dots, n \end{cases} \tag{3}$$

En proposant une bonne organisation des calculs (à faire à la main !),

**Q-3-3-3 :** Déterminer $x_3$, **si possible** $x_4$ en le mettant sous forme rationnelle.

> **Note 1** (Résultats attendus).
>
> - $x_3 = \frac{186109}{58330}$
> - $x_4 = \frac{29624684255979638061082124747176943081}{9582856562032169254671164155409203670}$
>
> *On pourra s'aider d'un outil de calcul symbolique (calculatrice) dans le calcul des différences divisées.*

**Q-3-3-4 :** Déterminer $|g(x_4)|$, $|x_4 - x_3|$ et commenter avec en vue une condition d'arrêt pour algorithme (3).

**Q-3-4 :** $\boxed{\textbf{Mise en oeuvre}}$.

Pour mettre en oeuvre l'algorithme précédent, il est nécessaire de fournir une condition *d'arrêt* des calculs.

> **Note 2** (Text d'arrêt).
>
> Dans l'algorithme ci-dessus, le test d'arrêt peut-être au choix :
>
> - $|g(x_n)| \leq \varepsilon_f$
> - $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon_x$
>
> où $\varepsilon_f$, et $\varepsilon_x$ sont des réels positifs *suffisamment* petits.

**Q-3-4-5 :** Mettre en oeuvre cet algorithme à travers une fonction de prototype

**Listing 1: Recherche de zéro par l'interpolation inverse**

```python
def ZeroParInterpInverse (f, x0, x1, eps):
  """
    Recherche de x* tel que f(x*) = 0, par la methode de l'interpolation inverse
    Entree :
       f      : la fontion dont on cherche le zero, supposee bijective dans l'intervalle considere
       x0, x1 : deux approximations distinctes initiales de la racine
       eps    : la tolerance necessaire pour le test d'arret
    Sortie :
       x : la suite generee des valeurs approchees de la racine (toute la suite pour une analyse)
       y : la suite generee des valeurs de f en chaque element de x
  """
```

> **Note 3.**
>
> - *La mise en oeuvre pourra nécessiter au préalable l'interpolation de Newton.*
> - On justifiera son choix du test d'arrêt ainsi que des valeurs de $\varepsilon_f$ ou $\varepsilon_x$ jugées pertinentes.
> - **On remarquera qu'à chaque itération on ajoute des points d'interpolation. On sélectionnera alors en le justifiant le type de méthode d'interpolation le plus approprié.**

**Q-3-4-6 :** Tester l'algorithme en évaluant $\tilde{x}$ de l'exemple ci-dessus.