Université Paris-Sud
Licence de Mathématiques

Introduction au calcul scientifique
S4 UE Math209 - Année 2016-2017

Travaux Pratiques en Python 2

Exercice 1 : Fonctions convexes
On considère les fonctions suivantes

$$f : [0, 10] \to \mathbb{R} \quad g : [0, 10] \to \mathbb{R} \quad h : [-10, 10] \to \mathbb{R} \quad u : [-10, 10] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto e^x, \qquad x \mapsto x^2, \qquad x \mapsto -x, \qquad x \mapsto x^3.$$

1. En utilisant la bibliothèque *matplotlib.pyplot* de Python, tracer le graphe de la fonction f ainsi que ses tangentes en quelques points.
2. La fonction f semble-t-elle convexe ?
3. Même question pour les fonctions g, h et u sur leur ensemble de définition respectif.

Exercice 2 : Limite de suites et vitesse de convergence

RAPPEL : ORDRE DE CONVERGENCE NUMÉRIQUE

En théorie :
On veut montrer que la suite $(u_n)_n$ converge à l'ordre p vers ℓ. On sait qu'il existe un réel C et un entier N_0, tels que $\forall n > N_0$

$$|u_{n+1} - \ell| \leq C|u_n - \ell|^p.$$

Soit en passant en échelle logarithmique,

$$\ln(|u_{n+1} - \ell|) \simeq p \ln(|u_n - \ell|) + \ln(C). \tag{1}$$

L'ordre p correspond donc au coefficient directeur de la droite de $\ln(|u_{n+1} - \ell|)$ en fonction de $\ln(|u_n - \ell|)$.

Commandes Python utiles :
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```
• `plt.loglog(x,y)` : permet de tracer $\ln(x)$ en abscisse et $\ln(y)$ en ordonnée.
• Il faut donc tracer le nuage de points `plt.loglog(`$|u_n - \ell|$`,` $|u_{n+1} - \ell|$`)` et déterminer le coefficient directeur de la droite de régression linéaire. Pour cela, comparez ce nuage de points aux droites `plt.loglog(x,x)`, `plt.loglog(x,x`^{2}`)`, `plt.loglog(x,x`^{3}`)`... Si une de ces droites est parallèle au nuage de points alors l'ordre de convergence sera la puissance correspondante (1, 2 ou 3...).

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sin(a^n)$ où $a = 0.7$.

1. Tracer les 50 premières itérations de (u_n) en fonction de n. La suite semble-t-elle converger ? Si oui, quelle serait sa limite ?
2. Déterminer l'ordre de convergence de la suite. Pour cela, tracer en échelle logarithmique $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$ et calculer la droite de régression linéaire. L'ordre de convergence p apparaît alors comme le coefficient directeur de cette droite, expliquez pourquoi.

3. En traçant les 50 premières itérations de la suite (v_n) définie par $v_n = b^{p^n}$ avec $b = 0.9$ et $p = 3$, montrer graphiquement que (v_n) converge vers 0 et déterminer sa vitesse de convergence.

Exercice 3 : Point fixe du cosinus
On considère la fonction $f(x) = \cos(x)$ dans l'intervalle $[0, 1]$.

1. Écrire un script $point\_fixe1.py$ qui fabrique et affiche le vecteur ligne des itérés $u_0, ...u_{20}$ lorsque $u_0 = 0$. Modifier ces instructions pour obtenir les 20 premiers termes de la suite $u = (u_n)$ lorsque $u_0 = \frac{\pi}{4}$, que constatez-vous?

2. On considère la fonction f : $f(x) = \cos(x)$. Tracer dans une même figure:
   - la courbe représentative de f en bleu,
   - la droite $y = x$ en rouge,
   - la ligne brisée qui joint les points $(u_0, 0), (u_0, f(u_0)), (u_1, u_1), (u_1, f(u_1)), ..., (u_{10}, u_{10})$, lorsque $u_0 = \frac{\pi}{4}$, en vert.

3. On cherche à calculer une valeur approchée de l_0, le point fixe de f dans $[0, 1]$. Il s'agit de calculer les termes u_n de la suite u, tant que $|u_{n+1} - u_n| > eps$ (on prendra $eps = 10^{-5}$). Pour cela, écrire une fonction *point_fixe* qui prend en arguments la fonction f, u_0 et *eps* la précision souhaitée, et qui renverra une valeur approchée de l_0.

4. (L'ordre de convergence) On rappelle que la définition d'ordre de convergence est sur la fiche de cours numéro 2. Calculer $err_n = |u_n - l_0|$ avec $u_0 = 0$. En déduire l'ordre de convergence à l'aide de la commande `plt.loglog`.

Exercice 4 : Point fixe et équation de Fibonacci
On étudie l'équation du troisième degré, proposée vers 1225 par Fibonacci:

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0, \tag{2}$$

cette équation admet une et une seule solution réelle sur l'intervalle $[1, 2]$.

1. Proposez une fonction f telle que la solution x_0 de $f(x) = x$ soit la solution de l'équation (2). Puis, utilisez la fonction *point_fixe* de l'exercice 3 (question 3) pour trouver cette solution.

2. Utilisez la même méthode que celle de la question 4 de l'exercice 3 pour déterminer l'ordre de convergence.