MATH 104 Groupe A4
Séance du 09 avril 2020

A faire :

1- Achever la fiche de TD 4:
Exercices 12-2 et 12-3

2- Révision sur la fiche TD 4 :
Retour sur les exercices 1 à 4 (Thème 1 : Calcul des developpements limités)

3- Se préparer pour une interrogation prévue des le retour des congés.

- ***bien connaître les DL en x = 0 et en un autre point que x = 0***
- ***pourvoir déterminer l'équation de la tangente en un point x0 au graphe d'une fonction et sa position relative par rapport à ce graphe au voisinage de ce point.***
- ***pouvoir déterminer l'équation des asymptotes au graphe d'une fonction et fournir en le justifiant les positions relatives des asymptotes et le graphe de la fonction.***

Début et pendant séance :

- **M'informer si vous rencontrez des difficultés (*je suis joignable pendant le créneau de la séance, comme la semaine dernière*).**
- **Pour la préparation à l'interrogation, *je suis aussi joignable par mail hors créneau si vous rencontrez des difficultés (avec les exercices d'entraînement).***
- **Penser à remplir et me transmettre votre fichier suivi voir page web : https://www.imo.universite-parissaclay.fr/~apoung/mywepage/math104.php**
- **J'attends vos questions. Et bon travail.**

Fin séance :
Ce fichier pourra être enrichi d'indications en fin de séance. (*Comme la semaine dernière*).

Voici quelques détails :

Thèm4 : Exercice 12-2

• Cas $f_2(x) = \sqrt{x(1+2x)}\, e^{\frac{1}{x}}$

• Domaine de définition

$$x \in Df_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(1+2x) \geq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$1+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(1+2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sqrt{x(1+2x)}\,e^{\frac{1}{x}}$		✓	0		‖	✓	

Donc $Df_2 =]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup]0, +\infty[$.

• Calculons les limites aux bornes du domaine de définition

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x(1+2x)}\, e^{\frac{1}{x}} = +\infty \times e^0 = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f_2(x) = 0}$$, et f_2 est continue en $-\frac{1}{2}$ à gauche

$\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = 0^+ \times +\infty$ f I.

Levons l'indétermination

$$\sqrt{x(1+2x)}\, e^{\frac{1}{x}} = \sqrt{1+2x}\left(\sqrt{x}\, e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x(1+2x)}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{u}}\, e^{u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u^{\frac{1}{2}}} = +\infty$$

Donc : $$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = +\infty.}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x(1+2x)}\, e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$$

Conclusion partielle :

- le graphe de f_2 possède $\boxed{\text{une asymptote (verticale) à droite de } x=0.}$
- le graphe de f_2 ne possède pas d'asymptote horizontale
- le graphe de f_2 peut posséder ~~une~~ asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$.

Asymptotes potentielles en $+\infty$ et $-\infty$

utilisons pour cela les développements au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

Posons $u = \frac{1}{x}$ pour se ramener à un DL au voisinage de 0.

$$f_2(x) = \sqrt{\frac{1}{u}\left(1+\frac{2}{u}\right)}\, e^{u} = \sqrt{\frac{2+u}{u^2}}\, e^{u}$$

Done au voisinage de $u=0$, on a :

$$\text{“}f_2(x)\text{”} = \frac{\sqrt{2+u}\, e^{u}}{|u|}$$

Pour déterminer les asymptotes et leur position, il est nécessaire d'effectuer un DL à l'ordre 3 au moins en $u=0$ de $\sqrt{2+u}\, e^{u}$.

Or : $\sqrt{2+u} = \sqrt{2}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Comme $(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}u^3 + u^3\varepsilon(u)$

on a :

$$\sqrt{2+u} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{u}{4} - \frac{u^2}{32} + \frac{u^3}{128}\right) + u^3\varepsilon_1(u)$$

De même

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\varepsilon_2(u).$$

où $\lim_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$ et $\lim_{u \to 0} \varepsilon_2(u) = 0$

On obtient le DL à l'ordre 3 en $u=0$ de $\sqrt{2+u}\, e^{u}$ en appliquant la règle du produit des DL

Donc

$$\sqrt{2+u}\,e^{u} = \sqrt{2}\left(1+\frac{5}{4}u+\frac{23}{32}u^2+\frac{103}{384}u^3\right) + u^3\varepsilon_3(u).$$

Ainsi, au voisinage de $u=0^-$

$$\frac{\sqrt{2+u}\,e^{u}}{|u|} = \frac{\sqrt{2+u}\,e^{u}}{-u} = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{5}{4}+\frac{23}{32}u\right) + u^2\varepsilon(u)$$

en remplaçant u par $\frac{1}{x}$, on a:

au voisinage de $-\infty$ $\left(\begin{array}{l} u\to 0^- \\ x\to -\infty\end{array}\right)$

$$f_2(x) = -\sqrt{2}\left(x+\frac{5}{4}+\frac{23}{32}\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc en $-\infty$,

$$f_2(x) - \left(-\sqrt{2}x - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{x}\left(-\frac{23\sqrt{2}}{32} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

D'où

$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) - \left(-\sqrt{2}x - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = 0$$

ce qui montre que:

la droite d'équation $y = -\sqrt{2}\left(x+\frac{5}{4}\right)$ est asymptote (oblique) au graphe de f_2 au voisinage de $-\infty$

Comme $f_2(x) - \left(-\sqrt{2}x - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$ a le signe de $-\frac{1}{x}\frac{23\sqrt{2}}{32}$ au voisinage de $-\infty$, c-à-d positive, on déduit que,

L'asymptote $y = -\sqrt{2}\left(x+\frac{5}{4}\right)$ au graphe de f_2 au voisinage de $-\infty$ est en dessous du graphe

On traite de manière analogue en $+\infty$.

au voisinage de $u=0^+$ on a:

$$\frac{\sqrt{2+u}\,e^{u}}{|u|} = \frac{\sqrt{2+u}\,e^{u}}{u} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{5}{4}+\frac{23}{32}u\right) + u^2\varepsilon(u)$$

en remplaçant ~~u~~ par $\frac{1}{x}$, on a

au voisinage de $+\infty$ $\left(\begin{array}{l} u\to 0^+ \\ x\to +\infty\end{array}\right)$

$$f_2(x) = \sqrt{2}\left(x+\frac{5}{4}+\frac{23}{32}\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc:

$$f_2(x) - \sqrt{2}\left(x+\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{23\sqrt{2}}{32} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

D'où:

- $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) - \sqrt{2}\left(x+\frac{5}{4}\right) = 0$
- $f_2(x) - \sqrt{2}\left(x+\frac{5}{4}\right)$ a le signe de $\frac{1}{x}\frac{23\sqrt{2}}{32}$ au voisinage de $+\infty$ c-à-d >0.

Donc:

La droite d'équation $y = \sqrt{2}\left(x+\frac{5}{4}\right)$ est asymptote au graphe de f_2 au voisinage de $+\infty$ et y est en dessous du graphe.

Retour sur les le thème 1 :

Thème 1 : Calcul des developpements limités

TD4 | Développements limités

1 | Calcul des developpements limités en 0.

Exercice 1 : Sommes et produits

Calcul des DL en 0 à l'ordre 4.

- $\cos \dfrac{1}{1-x} - e^{x} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{23x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$

Rappel : $f : I \to \mathbb{R}$, $0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$

Déf : f possède un dév. lim. à l'ordre n en 0 ssi $\exists\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tq $\exists\ \varepsilon : I \to \mathbb{R}$

tq : $\underbrace{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$ $+ x^n \varepsilon(x)$.

- $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

est appelé DL de f en 0 à l'ordre n.

Existence Donnée par la formule de Taylor-Young.

Unicité : Evidente : égalité de polynômes

$\Rightarrow$ si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ DL en 0 de f à n

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$, $p \leq n$ est DL en 0 de f à p

$\Rightarrow$ - $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ DL en 0 de f à n
- f paire

$\Big\} \Rightarrow a_{2k+1} = 0 \quad \forall\, 0 \leq 2k+1 \leq n$

idem f impaire $\Rightarrow a_{2k} = 0 \quad \forall\, 0 \leq 2k \leq n$

DL et dérivabilité

si f admet lim l en 0 $\Leftrightarrow$ f possède DL en 0 d'ordre 0.

f dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f possède DL en 0 d'ordre 1.

RQ : $f(x) = 1 + x^3 + x^4 \sin \frac{1}{x^3}$

$\Rightarrow f$ possède DL d'ordre 3 en 0.

Mais $f'(x) = 3x^2 - 3\cos \frac{1}{x^3} + 4x^3 \sin \frac{1}{x^3}$

et $f'(x)$ n'a pas de limite en 0.

Conclusion : f n'est pas C^1.

DL à connaître

(ce sont celles des f^n élémentaires obtenues par Taylor Young)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \varepsilon(x).$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{k!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} \varepsilon(x).$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \forall x > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Opération sur les DL

- Somme : $DL(f+g)$ { calculer chaque DL à l'ordre n puis sommer.
- Produit $DL(f \times g)$ { calculer chaque DL à l'ordre n puis ~~faire le produit~~ conserver seul les termes d'ordre $\leq n$
- Composée $DL(f(g))$
- Primitive $DL(F)$ calculer le DL de f puis intégrer
- Dérivée $DL(f')$ calculer le DL de f puis dériver

Utilisation des DL

- Calcul des limites
- Recherche et position des asymptotes de $f(x)$.

DL en $x_0 \neq 0$

Poser $x = x_0 + h$ et faire DL $h \mapsto f(x_0+h)$ en 0 puis remplacer h par $x - x_0$.

Pour chacun des cas ci-dessous : !!!! complétez en fournissant le domaine de définition des fonctions !!!!!!!!!!!!

Préférez éventuellement le corrigé .pdf qui vous est donné en cours.

Ceci n'est donc fourni qu'au cas où vous n'auriez pas pu avoir le corrigé .pdf

Exercice 1 Sommes et produits

DL à l'ordre 4 en 0 de

- $\frac{1}{1-x} - e^x$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_2(x)$$

D'où

$$\boxed{\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{23}{24}x^4 + x^4\underbrace{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}_{\varepsilon(x)}}$$

- $\cos x - 1 + \frac{x}{2}\sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underbrace{x^5\varepsilon(x)}_{x^4\varepsilon_1(x) \text{ ok}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_2(x)$$

D'où :

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$\frac{x}{2}\sin x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{2}\varepsilon_2(x)$$

D'où par addition membres à membres et en ne gardant à droite que des monômes de degré au plus 4. ma

$$\boxed{\cos x - 1 + \frac{x}{2}\sin x = -\frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)}$$

- $(x+1)\sqrt{1+x^2}$

$x+1 = 1+x+$

$$\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)u^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)u^3 + \frac{1}{24}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)u^4 + u^4\varepsilon_1(u)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{3}{48}u^3 - \frac{15}{24 \times 16}u^4 + u^4\varepsilon_1(u)$$

D'où

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$(1+x)\sqrt{1+x^2} = (1+x)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon_1(x)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon_1(x)$$
$$\quad x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} + x^5\varepsilon_1(x)$$

$$\boxed{= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x) = (x+1)\sqrt{1+x^2}}$$

- $\sin x \cos x$ $p(x)$

$$\sin x = \overbrace{x - \frac{x^3}{6}} + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{Q(x)} + x^4\varepsilon_2(x)$$

On effectue le produit PQ et on ne conserve que les termes de degré au plus 4.

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}$$
$$\quad - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{6 \times 24}$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + x^4\varepsilon_3(x)$$

D'où

$$\boxed{\sin x \cos x = x - \frac{2}{3}x^3 + x^4\varepsilon(x)}$$

- $e^x\sqrt{1+x}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3 + \frac{1}{24}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} - \frac{5x^4}{128} + x^4\varepsilon_2(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \underbrace{\frac{7x^5}{256} + x^5\varepsilon_2(x)}_{x^4\varepsilon_2(x)}$$

$$e^x\sqrt{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}\right) + \cdot$$

$$= 1 + x\left(\frac{1}{2}+1\right) + x^2\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$+ x^3\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)$$
$$+ x^4\left(-\frac{5}{128}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right) + x^4\varepsilon_3(x)$$

$$\boxed{e^x\sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + \frac{11}{128}x^4 + x^4\varepsilon(x)}$$

Exercice 2 Quotient et composition

DL à l'ordre 4 de :

$\tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_2(x)$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - x^4\varepsilon_2(x)\right)}_{u}}$$

or

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^4\varepsilon(u)$$

$$1 + u = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

$$u^2 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_3(x)$$

$$u^3 + u^4 = x^4\varepsilon_4(x)$$

D'où

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_5(x)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon_5(x)$$

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right)$$
$$= x + x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + x^5(\dots)$$

d'où

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)}$$

$\dfrac{1}{1-x+x^2}$

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1-u} \quad \text{où } u = x - x^2$$

$$\text{or } \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^4\varepsilon_1(u)$$

$$1 + u = 1 + x - x^2$$

$$u^2 = (x - x^2)^2 = x^2 - 2x^3 + x^4$$

$$u^3 = (x^2 - 2x^3 + x^4)(x - x^2)$$
$$= x^3 + x^4(-1-2) + x^4\varepsilon_2(x)$$
$$= x^3 - 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

$$u^4 = u^3(x - x^2) = (x^3 - 3x^4 + x^4\varepsilon_2)(x - x^2)$$
$$= x^4 + x^4\varepsilon_3(x)$$

D'où

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x(1) + x^2(-1+1) + x^3(-2+1) + x^4(1-3+1) + x^4\varepsilon_4$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x)}$$

$e^{\sin x}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4\varepsilon_2(u)$$

$$1 + u = 1 + x - \frac{x^3}{6}$$

$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon_3(x)$$

$$\frac{1}{6}u^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$
$$= x^3\left(\frac{1}{6}\right) + x^4\varepsilon_4(x)$$

$$\frac{u^4}{24} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_5(x)$$

D'où

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\right) + x^4\varepsilon(x)$$

$$\boxed{e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)}$$

$$\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$$

explique pourquoi l'ordre 5

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon_1(x)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \varepsilon_1(x).$$

$$= 1 + u$$

où $u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \varepsilon_1(x)$

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} - \frac{5u^4}{128} + u^4 \varepsilon_2(u)$$

$$1 + \frac{1}{2}u = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{240} + \cdots$$

$$-\frac{u^2}{8} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{36}\right) + x^4 \varepsilon_3(x)$$

$$\frac{u^3}{16} - \frac{5u^4}{128} + \varepsilon_2(u) u^4 = x^4 \varepsilon_4(x).$$

D'où

$$\sqrt{\frac{\sin x}{x}} = 1 + x^2\left(-\frac{1}{12}\right) + x^4\left(\frac{1}{240} - \frac{1}{8 \times 36}\right) + x^4 \varepsilon(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{48}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{\sin x}{x}} = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440} + x^4 \varepsilon(x)}$$

Exercice 3 : Intégration

DL à l'ordre 4 en 0

$\ln(1+x)$.

RQ $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ · $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$

Il suffit de calculer DL à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x}$ en 0 puis d'intégrer.

or $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon_1(x)$

D'où $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$

Ainsi $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \int_0^x t^3 \varepsilon(t)$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_3(x)}$$

arcsin x

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(-u) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-1+\frac{1}{2}\right)(-u)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-1+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)(-u)^3 + u^3 \varepsilon(u)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \frac{5}{16}u^3 + u^3 \varepsilon(u)$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3}{8}t^4 + t^4 \varepsilon_2(t)$$

Donc

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + x^5 \varepsilon_3(x)$$

Et à l'ordre 4 :

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x)}$$

arctan x

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \underbrace{\arctan(0)}_{=0}$$

or $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4 \varepsilon_1(x)$.

D'où $\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + x^4 \varepsilon(x)}$

$\int_0^x e^{t^2}\,dt$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + t^4 \varepsilon_1(t)$$

D'où $e^{t^2} = 1 + t^2 + \underbrace{\frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24} + t^8 \varepsilon_1(t^2)}_{t^3 \varepsilon_2(t)}$

Donc

$$\boxed{\int_0^x e^{t^2}\,dt = x + \frac{x^3}{3} + x^4 \varepsilon(x)}$$

Exercice 4

DL à l'ordre 5 en 0.

$\boxed{\ln(x+1)\sin x}$

Rep : $x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + x^5\varepsilon(x)$.

$\boxed{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$

Rep : $-x - \frac{x^3}{8} - \frac{7x^5}{128} + x^5\varepsilon(x)$.

$\boxed{\sin x \cos x}$

Rep : $1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + x^6\varepsilon(x)$.

$\boxed{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

Rep : $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + x^5\varepsilon(x)$.

$\boxed{e^{x^2}\ln(1-x)}$

Rep : $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} - \frac{31x^5}{30} + x^5\varepsilon(x)$

$\boxed{\ln(\cos x)}$

Rep : $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^5\varepsilon(x)$.

$\boxed{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

Rep : $e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + \frac{13e}{6}x^3 + \frac{73}{24}ex^4$
$+ \frac{167}{40}ex^5 + x^5\varepsilon(x)$.

$\boxed{\ln(1+x^2)}$

Rep : $x^2 - \frac{x^4}{2} + x^5\varepsilon(x)$.

$\boxed{\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt}$

Rep : $\int_0^x - \frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + x^5\varepsilon_1(x) = -\frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{720} + x^5\varepsilon(x)$