MATH 104 Groupe A4
Séance du 02 avril 2020

On doit traiter les exercices 5 à 11 au moins.
On reviendra sur les exercices 1 à 5

Thème 1 : Calcul des developpements limités

- Si vous avez rencontré des difficultés sur les exercices 1 – 5,
- M'écrire ou remplire votre fichier suivi voir page web :
https://www.imo.universite-parissaclay.fr/~apoung/mywepage/math104.php

- J'attends vos réponses:

Thème 2 : Application au calcul des limites, tangentes et détermination des positions relatives des tangentes

- **Exercice 5 : Calcul des limites en 0**

Exercice 5-1 : (sin(x)-x)/x^3 — **Rep attendue : -1/6**

Exercice 5-2 : (1 + ln(1+x) – exp(x))/(1 – cos(x)) — **Rep : attendue : -2**

RQ : On est dans un cas où l'on pourrait ne pas déduire le DL de l'expression mais seulement ce qui nous intéresse c'est la limite.
On écrit alors :

$$\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} = \frac{\cancel{x^2}(-1+\varepsilon_5(x))}{\cancel{x^2}(\frac{1}{2}+\varepsilon_6(x))} \to \frac{-1}{\frac{1}{2}}$$

Conséquence, dans le cadre d'un rapport, il n'est pas obligatoire de déterminer le DL du rapport.
On peut simplement faire les DL du numérateur et du dénominateur afin de lever l'indétermination

Exercice 5-4 1/sin(x) – 1/x — **Rep : 0**

Exercice 5-5 1/ln(1+x) – 1/(exp(x) -1) — **Rep : 1**

Dans ces 2 exercices il faut mettre l'expression au même dénominateur pour faire parître la forme indéterminée 0 / 0.

On Lève l'indétermination en effectuant les DL du numérateur et du dénominateur. (Puisqu'on souhaite seulement lever l'indéermination 0/0, il n'est pas nécessaire de chercher un DL du rapport)

1/ln(1+x) – 1/(exp(x) -1) = x^2(1 + epsi1(x))/ x^2/(1 + x epsi2(x))

Voici les détails

02 Application aux calculs des limites, calculs de tangentes et positions relatives en 0.

Exercice 5

Calcul des limites lorsque $x \to 0$.

$$\boxed{\frac{\sin x - x}{x^3}} \qquad \text{Rep : } -\frac{1}{6}$$

Faisons un DL en 0 à l'ordre de $\sin x$.

RQ : Il faut que $\sin x - x$ soit développé jusqu'à l'ordre 3 au moins. On va donc prendre l'ordre 4.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x)$$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

D'où

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + x^2 \varepsilon(x)$$

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.

$$\boxed{\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}} \qquad \boxed{\text{Rep : } -2}$$

RQ : Pour la recherche des limites, il suffit de déterminer le DL à l'ordre 0 ou 1 au plus de l'expression. Pour cela, on essaie d'obtenir les DL à l'ordre 1 des différentes expressions. On pousse plus loin (ordre 2 ou 3) si les DL d'ordre 1 est nul.

Ainsi, généralement les DL à l'ordre 2 des différents termes sont suffisants.

$$1 + \ln(1+x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x)$$

D'où le DL du numérateur :

$$1 + \ln(1+x) - e^x = -x^2 + x^2 \varepsilon_3(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_4(x)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_5(x)$$

D'où :

$$\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = \frac{-x^2}{\frac{x^2}{2}} + \varepsilon_6(x)$$

On obtient le DL à l'ordre 0 de l'expression. À savoir

$$\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = -2 + \varepsilon_3(x).$$

D'où $\lim_{x \to 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = -2$.

RQ : On est dans un cas où l'on pourrait ne pas déduire le DL de l'expression mais seulement ce qui nous intéresse c'est la limite. On écrit alors :

$$\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = \frac{\cancel{x^2}\left(-1 + \varepsilon_3(x)\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_5(x)\right)} \to \frac{-1}{\frac{1}{2}}$$

Conséquence, dans le cadre d'un rapport, il n'est pas obligatoire de déterminer le DL du rapport. On peut simplement faire les DL du numérateur et du dénominateur afin de lever l'indétermination.

Exercice 7 -1: sqrt(1+ 2x) -sqrt(1+ x^2)

Vérifiez que 0 est dans le domaine de définition :   1+ 2 x >= 0 i.e x >= -1/2

Exercice 7

DL en 0 à préciser
Équation de tangente en 0 au graphe de fonctions.
Position relative du graphe et de la tangente.

$$\boxed{f_1(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x^2}}$$

Pour déterminer l'équation de la tangente et sa position relative, il faut chercher le DL de f en 0 à un ordre ≥ 2, en s'arrêtant au premier terme non nul après le DL d'ordre 1.

Vérifions que $0 \in Df_1$ (domaine de définition de f_1)

$x \in Df_1 \Leftrightarrow 1+2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Donc $Df_1 = [-\frac{1}{2}, +\infty[\ni 0$.

Pour les DL, on se rappelle que :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}u^3 + u^3\varepsilon(u)$$

avec $\lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.

D'où

$$\sqrt{1+2x} = (1+u)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } u = 2x$$
$$= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2\times4}u^2 + \frac{3u^3}{6\times8} + u^3\varepsilon(u)$$
$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + (2x)^3\varepsilon(2x)$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + (x^2)^3\varepsilon(x^2)$$

D'où

$$\boxed{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x^2} = x - x^2 + x^2\varepsilon(x)}$$

Donc f_1 admet un DL à l'ordre 1 en 0

(car $f_1(x) = x + x\underbrace{(-x + x\varepsilon(x))}_{\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$)

Donc f_1 est dérivable en 0 et comme $\lim_{x \to 0} f_1(x) - x = 0$, il vient

L'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1 est $y = x$

De plus, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = -1$

i.e $\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)-x}{x^p} = a_p$ avec $\begin{cases} p = 2 \\ a_p = -1 \end{cases}$

Comme p est paire et $a_p < 0$

Le graphe de f est en dessous de la tangente $y = x$ en 0.

$$\boxed{\text{Cas } f_2(x) = \arccos(x) + \cos(x)}$$

On sait que $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

D'où

$$\arccos(x) - \arccos(0) = \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Donc

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

or de l'exercice 3, on a obtenu le DL de $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$.

Donc $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - x^4\varepsilon_1(x)$

De même $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_2(x)$

D'où $\boxed{f_2(x) = \frac{\pi}{2} + 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}$

avec $\varepsilon(x) = -\frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + x^2(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$

D'où f_2 admet une tangente en 0 d'équation $y = \frac{\pi}{2} + 1 - x$ et cette tangente est au dessus du graphe de f_2 au voisinage de 0.

$$\boxed{\text{Cas } f_3(x) = e^{2x - x^2}}$$

$f_3(x) = e^u$ avec $u = 2x - x^2$.

$$= 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u) \text{ avec } \varepsilon(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$$
$$= 1 + 2x - x^2 + \frac{(2x-x^2)^2}{2} + (2x-x^2)^2\varepsilon(2x-x^2)$$

$$\boxed{f_3(x) = 1 + 2x + x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}$$

D'où l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_3 est $y = 1 + 2x$.

Comme $f_3(x) - (1+2x) = \underbrace{x^2(1+\varepsilon_1(x))}_{\text{a le signe de } x^2}$

cette tangente est en dessous du graphe au voisinage de 0.

Cas $f_4(x) = \int_0^x e^{t^2}dt = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$

D'où l'équation de la tangente en 0 $y = x$. Comme $f_4(x) - x$ a le signe de $\frac{x^3}{3}$ au voisinage de 0, 0 est point d'inflexion

Thème 3 : Calculs et Applications des développements limités en un point autre que x = 0

03 | Calculs et Applications des développements limités en un point autre que 0

Exercice 9 :

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$$

1 Domaine de définition de f

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \quad (*) \\ \text{et} \\ x-1 \neq 0 \quad (**) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \text{et} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3,+\infty[\\ \text{et} \\ x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [-3,1[\cup]1,+\infty[$

D'où

$$\boxed{D_f = [-3,1[\cup]1,+\infty[}$$

DL à l'ordre 1 de $2-\sqrt{x+3}$ au point $x=1$.

Pour effectuer le DL à l'ordre 1 au point $x=1$, on effectue un changement de variable pour se ramener à un DL à l'ordre 1 au voisinage de 0. Pour cela on pose $h = x-1$

$N(x) = 2-\sqrt{x+3}$ devient

$\bar{N}(h) = N(h+1) = 2-\sqrt{h+4}$.

et on cherche le DL à l'ordre 1 de $\bar{N}(h)$ au point $h=0$

or $\sqrt{h+4} = 2\left(\frac{h}{4}+1\right)^{\frac{1}{2}}$

Or $(1+u)^{\alpha} = 1+\alpha u + u\varepsilon(u)$ au voisinage de $u=0$.

D'où $\sqrt{h+4} = 2\left(1+\frac{h}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{4}+\frac{h}{4}\varepsilon(h)\right)$

$= 2+\frac{h}{4}+h\varepsilon(h)$

D'où

$2-\sqrt{h+4} = 2-2-\frac{h}{4}-h\varepsilon(h)$

$= -\frac{h}{4}-h\varepsilon(h)$.

Donc

$$\boxed{2-\sqrt{x+3} = -\frac{x-1}{4}-(x-1)\varepsilon(x-1) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.}$$

On peut poser $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x-1)$ et dire :

$$\boxed{2-\sqrt{x+3} = -\frac{x-1}{4}-(x-1)\varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon_1(x)=0}$$

Montrons que f admet un prolongement par continuité en $x=1$

On a $1 \notin D_f$ et f continue sur D_f

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0}$ F.I

Levons l'indétermination en effectuant les DL à l'ordre 1 en $x=1$ du numérateur et du dénominateur.

$2-\sqrt{x+3} = -\frac{x-1}{4}-(x-1)\varepsilon(x-1)$

$x-1 = x-1$

Donc au voisinage de 1

$f(x) = \dfrac{-\frac{x-1}{4}-(x-1)\varepsilon(x-1)}{x-1}$

$= -\frac{1}{4}-\varepsilon(x-1)$

D'où $\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{4}$.

Donc f admet un prolongement par continuité en 1 définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ -\frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On désigne encore $\tilde{f}$ par f.

2 Dérivabilité de f en 1, équation de la tange en 1 et position relative de la tangente

Nous avons vu ci-dessus que

$$f(x) = \frac{-\frac{x-1}{4} - (x-1)\varepsilon(x-1)}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{4} - \varepsilon(x-1)$$

Par conséquent le DL à l'ordre 1 du numérateur en $x=1$ n'était pas suffisant pour définir la tangente en $x=1$ au graphe de f.

Effectuons donc un DL à l'ordre 3 du numérateur en $x=1$.

On a comme donc besoin du DL à l'ordre 3 de $\left(1+\frac{h}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}u^3 + u^3\varepsilon(u)$$

où $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$.

En prenant $\alpha = \frac{1}{2}$, $u = \frac{h}{4}$, on a:

$$\left(1+\frac{h}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{h}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(\frac{h}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{3}{8}\left(\frac{h}{4}\right)^3 + \left(\frac{h}{4}\right)^3\varepsilon\left(\frac{h}{4}\right)$$

$$= 1 + \frac{h}{8} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{64} + \frac{1}{2}\frac{h^3}{512} + h^3\varepsilon_1(h)$$

avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0$.

D'où

$$2 - \sqrt{h+4} = 2 - 2\sqrt{1+\frac{h}{4}}$$

$$= -\frac{h}{4} + \frac{h^2}{64} - \frac{h^3}{512} + h^3\underbrace{\varepsilon_2(h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

et en remplaçant $h = x-1$

on a

$$2 - \sqrt{x+3} = -\frac{x-1}{4} + \frac{(x-1)^2}{64} - \frac{(x-1)^3}{512} + (x-1)^3\varepsilon_2(x-1)$$

Ainsi, au voisinage de $x=1$, on a

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{x-1}{64} - \frac{(x-1)^2}{512} + (x-1)^2\varepsilon_2(x-1)}$$

On a

$$f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{x-1}{64} + (x-1)\varepsilon_3(x-1)$$

où $\varepsilon_3(x-1) = \frac{x-1}{512} + (x-1)\varepsilon_2(x-1)$

Comme $\lim_{x\to 1}\varepsilon_3(x-1) = 0$

On déduit que f admet un DL à l'ordre 1 en $x=1$.

Par conséquent f est dérivable en $x=1$ avec $f'(1) = \frac{1}{64}$

Autre méthode (plus directe):

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)+\frac{1}{4}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{64} - \frac{x-1}{512} + (x-1)\varepsilon_1(x-1)\right] = \frac{1}{64}.$$

Puisque

$$\lim_{x\to 1} f(x) - \left[-\frac{1}{4} + \frac{x-1}{64}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[-\frac{(x-1)^2}{512} + (x-1)^2\varepsilon_2(x-1)\right] = 0.$$

La droite $y = -\frac{1}{4} + \frac{x-1}{64}$ est la tangente en $x=1$ au graphe de f

3/ Position relative de la tangente

Comme

$$f(x) - \left[-\frac{1}{4} + \frac{x-1}{64}\right] = (x-1)^2\left[-\frac{1}{512} + \varepsilon_2(x-1)\right]$$

avec $\lim_{x\to 1}\varepsilon_2(x-1) = 0$.

Il vient qu'au voisinage de $x=1$ $f(x) - \left[-\frac{1}{4} + \frac{x-1}{64}\right]$ a le signe de $-\frac{(x-1)^2}{512}$ qui est négatif.

Donc la tangente $y = -\frac{1}{4} + \frac{x-1}{64}$ au graphe de f en $x=1$ est au dessus du graphe.

Exercice 10

Équation de la tangente en 1 au graphe de f et sa position relative.

- Cas $f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$

Pour déterminer la tangente il faut d'abord s'assurer qu'elle existe.

Pour cela on doit vérifier que
- f est continue en $x=1$
- f est dérivable en $x=1$.

Il suffit pour cela d'effectuer le DL de f à l'ordre 3 en $x=1$.

Commençons par vérifier que 1 est dans le domaine de f.

Or $Df = \{x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \geq 0 \\ 3+x \geq 0 \end{cases}\}$. D'où

$$\boxed{Df = [0, +\infty[}.$$

Pour effectuer le DL de f en $x=1$ il suffit de faire le DL de $g(h) = f(h+1)$ en $h=0$.

Or $g(h) = 1+h+2\sqrt{1+h} - \sqrt{4+h}$

Comme $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} u^3 + u^3\varepsilon(u)$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $u = h$

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + h^3\varepsilon_1(h)$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $u = \frac{h}{4}$

on a $\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + \frac{h^3}{512} + h^3\varepsilon_2(h)$

D'où

$$g(h) = 1 + h + 2 + h - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{4} + h^3\varepsilon_1(h) - 2 - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{64} - \frac{h^3}{512} - h^3\varepsilon_2(h)$$

c'est-à-dire

$$g(h) = 1 + \frac{7h}{4} - \frac{15h^2}{64} + \frac{63h^3}{512} + h^3\varepsilon(h).$$

D'où le DL à l'ordre 3 de f en $x=1$ obtenu en remplaçant h par $x-1$

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{7(x-1)}{4} - \frac{15(x-1)^2}{64} + \frac{63(x-1)^3}{512} + (x-1)^3\varepsilon(x-1)}$$

On déduit de cette DL que
- f admet un DL à l'ordre 0 en 1 donc f admet une limite en 1.
- On le savait déjà puisque $1 \in Df$. et $f(1) = 1$.
- f admet un DL d'ordre 1 en 1 donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{7}{4} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Ainsi, f admet une tangente à la courbe de en 1 d'équation $y = 1 + \frac{7}{4}(x-1)$.

De plus

$$f(x) - \left[1 + \frac{7}{4}(x-1)\right] = (x-1)^2\left[-\frac{15}{64} + (x-1)\varepsilon_2(x-1)\right]$$

où $\varepsilon_2(x-1) = \frac{63}{512}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x-1)$

Or $\lim_{x\to 1} \varepsilon_2(x-1) = 0$

Donc au voisinage de $x=1$. $f(x) - \left[1 + \frac{7}{4}(x-1)\right]$ a le signe de $(x-1)^2\left(-\frac{15}{64}\right)$. Donc négatif.

Ainsi, la tangente à la courbe de f en $x=1$ est au dessus de la courbe.

RQ: le DL à l'ordre 2 en 1 était suffisant.

- Cas $g(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{2+x}$

$x \in D_g \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$.

Donc $\boxed{D_g = [0, +\infty[}$.

Cherchons le DL à l'ordre 2 de g en $x = 1$.

Effectuons le changement de variable $h = x - 1$ soit $x = h + 1$.

On cherchons le DL à l'ordre 2 de $g(h+1) = \sqrt{3h+3} - \sqrt{3+h}$ en $h = 0$

Or on sait que :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + u^2 \varepsilon(u)$$

avec $\lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$

D'où :

$$\sqrt{3+3h} = \sqrt{3}(1+h)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\left[1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + h^2\varepsilon(h)\right]$$

$$\sqrt{3+h} = \sqrt{3}\left(1+\frac{h}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{3} - \frac{1}{8}\frac{h^2}{9} + \frac{h^2}{9}\varepsilon\left(\frac{h}{3}\right)\right)$$

Donc

$$g(1+h) = \sqrt{3}\left(\frac{h}{3} - \frac{h^2}{9} + h^2\varepsilon_1(h)\right)$$

D'où en remplaçant h par $x-1$

$$\boxed{g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{(x-1)^2}{3\sqrt{3}} + (x-1)^2\varepsilon_1(x-1)}$$

On déduit que g est dérivable en 1 avec $g'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

L'équation de la tangente à la courbe de g en $x = 1$ est $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$

Comme $g(x) - \frac{x-1}{\sqrt{3}} = (x-1)^2\left[-\frac{1}{3\sqrt{3}} + \varepsilon_1(x-1)\right]$.

Comme $\lim_{x \to 1} \varepsilon_1(x-1) = 0$ au voisinage de $x = 1$, $g(x) - \frac{x-1}{\sqrt{3}}$ a le signe de $-\frac{(x-1)^2}{3\sqrt{3}}$ (or il est < 0)

Donc la tangente est au dessus de la courbe

Thème 4: Recherche d'asymptotes et leurs positions relatives

04 | Recherche d'asymptotes et positions relatives.

Exercice 12 :

On cherche les asymptotes des fonctions leur position relative au graphe de ces fonctions.

- Cas $f_1(x) = x\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$

- Domaine de définition de f_1

$$x \in Df_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x+2}{x} \geq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $Df_1 =]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$

- Calculons les limites aux bornes du domaine de définition

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\sqrt{\frac{x+2}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -2 \times 0^+ = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = 0^+ \times +\infty \quad FI$$

Levons l'indétermination

sur $\mathbb{R}^+$, on a $x\sqrt{\dfrac{x+2}{x}} = \sqrt{\dfrac{x^2(x+2)}{x}}$
$= \sqrt{x(x+2)}$

D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1(x) = 0^+$

f_1 se prolonge par continuité à droite de 0

Il n'y a donc pas asymptote en 0

Il y'aura une tangente qu'on pourra déterminer et la positionner par rapport à la courbe de f_1.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x+2}{x}} = +\infty$$

ie $\tilde{f}_1$ n'est pas dérivable en 0^+.

La tangente à la courbe de $\tilde{f}_1$ en 0^+ est verticale et orientée vers le haut.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty \times 1 = +\infty$

Conclusion à ce stade :

la courbe de f_1 n'a pas

- d'asymptote verticale

On n'a trouvé aucun réel a tel que $\lim\limits_{x \to a^+} f_1(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f_1(x) = \infty$

- elle n'a pas non plus d'asymptote horizontale

On n'a pas obtenu de limite finie en $-\infty$ ni $+\infty$.

car $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty \end{array}\right\} (*)$

(*) montre que le graphe de f_1 peut posséder des asymptotes (obliques) en $-\infty$ et $+\infty$

- Cherchons les asymptotes potentielles en $-\infty$ et $+\infty$

Cherchons un développement de f_1 au voisinage de $-\infty$

Pour cela, posons $u = \frac{1}{x}$ pour se ramener à un DL au $u = 0$.

$$f_1(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x}} = x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{u}(1+2u)^{\frac{1}{2}}$$

Le DL à l'ordre 2 est suffisant

or $(1+h)^{\alpha} = 1 + \alpha h + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)h^2 + h^2\varepsilon(h)$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

D'où pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $h = 2u$

$$f_1(x) = \frac{1}{u}\left(1 + u - \frac{u^2}{2} + (2u)^2 \varepsilon(2u)\right)$$

$$= \frac{1}{u} + 1 - \frac{u}{2} + \underbrace{2u\,\varepsilon(2u)}_{u\,\varepsilon_1(u)}$$

$$f_1(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim_{x \to -\infty} \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+1) = 0$

$$\boxed{\text{D'où } y = x+1 \text{ est asymptote en } -\infty \text{ au graphe de } f_1.}$$

Comme $f_1(x) - (x+1) = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ a le signe de $-\frac{1}{2x}$ au voisinage de $-\infty$, et puisque $-\frac{1}{2x} > 0$ dans le voisinage de $-\infty$,

$$\boxed{\text{Le graphe de } f_1 \text{ est au dessus de l'asymptote } y = x+1 \text{ en } -\infty}$$

On fait ~~pareil~~ en $+\infty$:

on a : le DL ne change pas :

$f_1(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)$ ~~au~~ voisinage de $+\infty$.

Donc $y = x+1$ est asymptote au graphe de f_1 en $+\infty$

$f_1(x) - (x+1)$ a le signe de $-\frac{1}{2x}$ au voisinage de $+\infty$. Or $-\frac{1}{2x}$ y est négatif.

Donc

$$\boxed{\text{Le graphe de } f_1 \text{ est en dessous de l'asymptote } y = x+1 \text{ en } +\infty}$$