Test final en Python

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Les documents papiers ainsi que vos fichiers informatiques sont autorisés.
Les commentaires des programmes sont appréciés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Merci de nommer votre fichier python *TestFinal-PrenomNom.py*

Exercice 1 : Méthode de point fixe
Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} g_a : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x + \dfrac{a - x^2}{2}, \end{array}$$

avec a un réel quelconque positif.

1. (Sur feuille, 0.5 point) La fonction g_a a-telle un point fixe ? Si oui, quelle est sa valeur ?
2. (En Python, 1 point) Tracer le graphe de la fonction g_a pour $a = 2.0$ en fixant l'axe des abscisses à $[0, 4]$ et l'axe des ordonnées à $[-3, 4]$. Sur la même figure graphique, tracer la droite $x \mapsto x$. On prendra soin de mettre un titre et une légende.
3. (Sur feuille, 0.5 point) Le graphique confirme-t-il ou infirme-t-il votre réponse de la question 1 ? Si g_2 possède un point fixe, placer ce point fixe sur le graphe à l'aide d'un marqueur `*`
4. (En Python, 2 points) Appliquer la méthode du point fixe à la fonction g_2. En notant $(x_k)_k$ la suite des itérés, on testera la méthode en partant de $x_0 = 0.34$ avec le critère d'arrêt $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-10}$.
5. (En Python, 2 points) En utilisant les 7 premières itérations de la suite $(x_k)_k$, déterminer l'ordre de convergence de la méthode pour $a = 2.0$.

Exercice 2 : Méthode de Newton
Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 - \dfrac{15}{2}x^2 + 11x + \dfrac{15}{2} \end{array}$$

On admet que cette fonction a un unique zéro dans l'intervalle $[0, 4.5]$.

1. (Sur feuille, 1 point) On note $(y_k)_k$ la suite des itérés obtenue par la méthode de Newton appliquée à la fonction f. Écrire y_{k+1} en fonction de y_k.
2. (En Python, 2 points) Implémenter la méthode de Newton, on utilisera pour condition initiale $x_0 = 1.5$ et pour critère d'arrêt $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-10}$. Le nombre maximal d'itérations autorisées sera iterMax= 15.
3. (En Python, 2 points) Tracer sur un même graphique, le graphe de f, l'axe des abscisses et placer sur cet axe des abscisses les points de la suite $(y_k)_k$. On fixera la fenêtre graphique à $[0, 4.5]$ en abscisse et $[-10, 15]$ en ordonnée.

Tournez la page SVP

Exercice 3 : Variante de la méthode de Newton : la méthode de la corde
Soit f une fonction ayant un unique zéro dans $[a, b]$. La méthode de la corde est donnée par

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(b-a)}{f(b)-f(a)}, \quad n = 0, ... \end{cases}$$

1. (Sur feuille, 1 point) Montrer que cette méthode consiste à remplacer la dérivée $f'(x_n)$ dans la méthode de Newton par une grandeur q fixe dont on donnera la valeur.
2. (En Python, 2 points) Implémenter cette méthode en Python.
3. (En Python, 0.5 point) Utiliser cette méthode pour rechercher le zéro $\ell = 3^{\frac{1}{4}}$ de la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 2] \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad x^4 - 3, \end{aligned}$$

   pour $a = 0$, $b = 2$, $x_0 = 1.98$, epsi$= 10^{-10}$ et iterMax$= 25$.
4. (En Python, 1 point) Déterminer l'ordre de convergence de la méthode au moyen d'un tracé en échelle logarithmique. On rappelle qu'il s'agit de tracer la droite passant par les points $x_k - \ell$ en abscisse et $x_{k+1} - \ell$ en ordonnée, en utilisant la fonction `plt.loglog` de Python. On pensera à mettre un titre, une légende et à comparer avec les droites de pente 1, de pente 2 et de pente 3.

Exercice 4 : Interpolation
Le tableau suivant recense la proportion des filles dans les filières scientifiques entre 1991 et 2001 :

Année	Pourcentage
1991	20.8%
2001	23.6%
2011	27.8%

Nous allons étudier l'évolution de cette proportion. On peut considérer les données comme une suite de 3 couples de points, et pour simplifier, on omet le pourcentage dans le calcul.

1. (Sur feuille, 1 point) Donner l'expression **non développée** du polynôme interpolateur de Lagrange associé à ce problème.
2. (En Python, 1 point) Afficher dans la fenêtre $[x_{\min}, x_{\max}] = [1991, 2031]$ et $[y_{\min}, y_{\max}] = [20, 45]$ les couples de points en les indiquant par un marqueur $\times$ bleu.
3. (En Python, 2 points) Tracer le polynôme interpolateur de Lagrange sur la figure (on rappelle qu'il faut importer le module `scipy.interpolate`). Vérifier que le graphe de ce polynôme passe par les couples de points connus.
4. (Sur feuille, 0.5 point) Conjecturer le pourcentage de filles faisant des études scientifiques en 2031.