Monodromie d'une famille d'hypersurfaces

Ania Otwinowska

0 Introduction

Soit Y une variété complexe projective lisse de dimension $N+1$ munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}(1)$; soit $d \in \mathbb{N}^*$; soit $\mathcal{V}^d \subset \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(d))$ l'ouvert paramétrant (à la multiplication par un scalaire près) les hypersurfaces projectives lisses de Y de classe $c_1(\mathcal{O}(d))$; soit $F \in \mathcal{V}^d$ définissant l'hypersurface X_F ; et soit $j_F : X_F \to Y$ l'immersion fermée. Rappelons que la cohomologie évanescente de X_F est l'espace

$$\mathrm{H}^k(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} = \mathrm{Ker}\,(g : \mathrm{H}^k(X_F, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^{k+2}(Y, \mathbb{C})),$$

où $k \in \{0, \ldots, 2N\}$ et où g désigne l'application de Gysin, déduite de l'application j_{F*} : $\mathrm{H}_{2N-k}(X_F, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}_{2N-k}(Y, \mathbb{C})$ par la dualité de Poincaré.

Le groupe $\pi_1(\mathcal{V}^d, F)$ agit par monodromie sur $\mathrm{H}^k(X_F, \mathbb{C})$. Cette action est décrite par la théorie de Lefschetz :

- pour $k \neq N$ nous avons $\mathrm{H}^k(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} = 0$ et la représentation de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d, F)$ sur $\mathrm{H}^k(X_F, \mathbb{C})$ est triviale ;
- les espaces $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ et $j_F^* \mathrm{H}^N(Y, \mathbb{C})$ sont en somme directe orthogonale pour la forme d'intersection ; la représentation de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d, F)$ sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$ est somme directe de la représentation triviale sur $j_F^* \mathrm{H}^N(Y, \mathbb{C})$ et d'une représentation irréductible sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$.

L'objectif de cet article est d'étendre ces résultats au cas d'une famille d'hypersurfaces lisses contenant un sous-schéma fixé.

Plus précisément, soit $W \subset Y$ un sous-schéma fermé de dimension n défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_W$. Nous supposons l'idéal homogène $I_W = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{I}_W \otimes \mathcal{O}(i))$ engendré en degré strictement inférieur à un entier e. Soit $\mathcal{V}^d(W) \subset \mathcal{V}^d$ l'espace paramétrant les hypersurfaces lisses contenant W. Nous montrons d'abord

Théorème 1 *Si $N < 2n$, pour tout $d \geq e$, l'espace $\mathcal{V}^d(W)$ est vide.*

Supposons $N \geq 2n$. Bien sûr, l'espace $\mathcal{V}^d(W)$ peut encore être vide (c'est le cas si W est trop singulier). Sinon, nous fixons $F \in \mathcal{V}^d(W)$ et nous étudions l'action de monodromie sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$ du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$.

Soit $H(W)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$ engendré par $j_F^* \mathrm{H}^N(Y, \mathbb{C})$ et, lorsque $N = 2n$, par les classes des composantes irréductibles de W de dimension n. L'espace $H(W)$ est $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-invariant. De plus, par le théorème d'indice de Hodge (*cf.* [W]), la forme d'intersection restreinte à $H(W)$ est non-dégénérée (en effet, elle est non dégénérée sur

$H(W) \cap \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} \subset \mathrm{H}^{n,n}(X)$ d'une part, et sur $j_F^* \mathrm{H}^N(Y, \mathbb{C})$ d'autre part). Comme l'action de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$ préserve la forme d'intersection, nous avons l'égalité de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-modules $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C}) = H(W) \oplus H(W)^\perp$. Le théorème principal est alors

Théorème 2 *Si $N \geq 2n$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de Y, telle que pour tout $d \geq Ce$ et pour tout $F \in \mathcal{V}^d(W)$ la représentation de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$ sur $H(W)^\perp$ est irréductible.*

Une hypothèse sur I_W est nécessaire : par exemple, si $d = 1$ et si W est contenu dans un seul hyperplan strict de Y d'équation F, la conclusion du théorème 2 est fausse : nous avons $\mathcal{V}^d(W) = \mathbb{C}^*\{F\}$ et la représentation de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d, F)$ sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$ est triviale quelle que soit la dimension de W. En revanche, lorsque I_W est engendré en degré strictement inférieur à d, nous montrons que le fait que W soit contenu dans une hypersurface lisse de degré d est équivalent à une condition portant sur le lieu singulier de W ; nous en déduisons que si $N < 2n$, l'espace $\mathcal{V}^d(W)$ est vide (c'est-à dire le théorème 1), et si $N \geq 2n$, l'espace $\mathcal{V}^d(W)$ est soit vide soit suffisamment gros (la proposition 1 donne un énoncé précis).

Dans le cas où W est lisse, le théorème 2 est vrai pour $C = 1$ grâce à l'argument très simple suivant, qui m'a été communiqué par Voisin. Soit $\pi_W : \widetilde{Y_W} \to Y$ l'éclaté de Y le long de W et soit E_W le diviseur exceptionnel de $\widetilde{Y_W}$. Le transformé strict $\widetilde{X_W}$ d'une hypersurface lisse X contenant W est une hypersurface lisse de $\widetilde{Y_W}$, isomorphe à l'éclaté de X le long de W, de classe $d\pi_W^* c_1(\mathcal{O}_Y(1)) - c_1(E_W)$. Les sections du fibré de classe $d\pi_W^* c_1(\mathcal{O}_Y(1)) - c_1(E_W)$ sont en bijection avec $\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{I}_W \otimes \mathcal{O}(d))$, donc le fait que I_W est engendré en degré strictement inférieur à d implique que ce fibré est très ample. L'énoncé résulte alors par le théorème de Lefschetz difficile de l'irréductibilité de la représentation de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W))$ sur la cohomologie évanescente de $\widetilde{X_W}$.

Malheureusement cette preuve ne s'étend pas au cas singulier. Supposons en effet que W possède un point singulier w qui n'est pas un point double ordinaire. Pour un pinceau générique $\pi : \mathcal{X} \to L$, où $L \subset \mathbb{P}\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{I}_W \otimes \mathcal{O}(d))$, il peut exister un point $l \in L$ tel que le schéma $\mathcal{X}$ est singulier au point (w, l) et (w, l) n'est pas un point double ordinaire. La monodromie locale de $\pi_1(\mathcal{V}^d \cap L)$ au voisinage de l ne vérifie alors pas nécessairement la formule de Picard-Lefschetz. Contrairement au cas où W est lisse, il n'existe donc pas en général d'éclatement $\pi_{\mathcal{X}} : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ tel que la famille $\pi \circ \pi_{\mathcal{X}} : \widetilde{\mathcal{X}} \to L$ soit un pinceau de Lefschetz. Nous pensons cependant que le théorème 2 reste vrai avec $C = 1$ lorsque W est singulier.

La motivation principale du théorème 2 apparaît dans son application à la théorie de Hodge. Rappelons que la conjecture de Hodge implique que pour tout $F \in \mathcal{V}^d$, l'espace des classes de Hodge évanescentes $\mathrm{Hdg(X_F)_{ev}} = \mathrm{H}^{n,n}(X_F) \cap \mathrm{H}^{2n}(X, \mathbb{Q})_{\mathrm{ev}}$ est engendré par la projection sur la cohomologie évanescente des classes des sous-variétés algébriques de X_F. Le lieu $NL_d = \{F \in \mathcal{V}^d \mid \mathrm{Hdg(X_F)_{ev}} \neq 0\}$ où cet énoncé est non vide s'appelle le *lieu de Noether-Lefschetz*. Si d est assez grand c'est une réunion dénombrable de sous-variétés algébriques strictes de $\mathcal{V}^d$. Nous montrons dans un autre article que pour $d \gg 0$ une hypersurface générique appartenant à une composante de NL_d de dimension suffisamment grande vérifie la conjecture de Hodge ci-dessus. Le théorème 2 est un ingrédient essentiel de la preuve.

La preuve du théorème 2 repose sur la construction d'une filtration de la (co)homologie de X_F au voisinage de la dégénérescence de X_F en la réunion de deux hypersurfaces lisses se coupant transversalement (proposition 4). Notre démarche s'inspire de [G-H 2] et [Lo] qui étudient le lieu de Noether-Lefschetz des surfaces de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ par une méthode similaire. Contrairement aux filtrations étudiées habituellement, et notamment à la filtration par le poids étudiée par Clemens [Cl], Schmid [Sc] et Steenbrink [St], notre filtration introduit une dissymétrie entre les hypersurfaces constituant la fibre singulière. En particulier, la cohomologie évanescente de l'une des hypersurfaces n'est pas un sous-espace du gradué associé à notre filtration (mais en est seulement un sous-quotient) ; cette propriété est cruciale pour la démonstration du théorème 2.

La suite de la preuve du théorème 2 est la suivante. Nous fixons $i \in \mathbb{N}$ tel que $e \leq i < d$ et nous étudions la (co)homologie de X_F au voisinage de sa dégénérescence en $X_A \cup X_K$ avec $A \in \mathcal{V}^i(W)$ et $K \in \mathcal{V}^{d-i}$. Nous exhibons une action naturelle de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^{d-i}, K)$ sur tous les gradués associés à la filtration de la (co)homologie de X_F que nous avons construite. Cette action se factorise par l'action de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$. Sur tous les gradués sauf un les deux représentations ont mêmes orbites et nous pouvons minorer les dimensions minimales des sous-représentations dans ces gradués par les dimensions des espaces de (co)homologie évanescente de X_K et de $X_A \cap X_K$, sur lesquelles l'action de $\pi_1(\mathcal{V}^{d-i}, K)$ est irréductible. Pour décrire l'action de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$ sur le dernier gradué nous procédons par récurrence sur N. Nous montrons ainsi que la dimension de la $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-représentation de monodromie engendrée par une classe de $H(W)^\perp$ est minorée par l'homologie évanescente d'une intersection complète lisse dans X_F d'hypersurfaces de degrés i et $d-i$ (proposition 5). Nous concluons par des estimations numériques de la dimension de ces espaces (proposition 6), en faisant varier l'entier i.

Remerciements. Je remercie l'arbitre de m'avoir signalé deux imprécisions, une dans la preuve du lemme 6 et une (plus sérieuse) dans la section 3.2, et de m'avoir indiqué la référence [K-A] qui simplifie la preuve de la proposition 1.

1 Schémas contenus dans une hypersurface lisse de grand degré ; preuve du théorème 1

1.1 Caractérisation intrinsèque et propriétés

Dans cette partie nous caractérisons les sous-schémas fermés $W \subset Y$ contenus dans une hypersurface lisse suffisamment ample de Y par une condition portant uniquement sur le lieu singulier de W. Nous établissons ensuite un énoncé de type *Bertini* pour la famille d'hypersurfaces contenant W et nous montrons que dans une intersection complète générique d'un nombre maximal d'hypersurfaces suffisamment amples contenant W la *liaison* de W est connexe et lisse. L'arbitre nous signale que ces résultats se trouvent partiellement démontrés dans [K-A], et nous l'en remercions.

Plus précisément, posons $I_W^i = \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{I}_W \otimes \mathcal{O}_Y(i))$ et notons $I_W = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_W^i$ l'idéal homogène définissant W dans Y ; soit e le plus petit entier tel que I_W est engendré en degré strictement inférieur à e. Soit enfin d un entier. Nous nous demandons à quelle condition sur W il existe une hypersurface lisse $X \subset Y$ de classe $c_1(\mathcal{O}(d))$ contenant W.

Si $d < e$ le problème n'a pas de solution simple, comme l'illustre le cas $Y = \mathbb{P}^{N+1}_{\mathbb{C}}$, $d = 1$: nous imposons seulement que W soit réalisable comme un sous-schéma de $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, ce qui autorise des singularités arbitraires, sauf la condition évidente que pour tout $x \in W$ l'espace tangent à W en x doit être de dimension inférieure ou égale à N. Notons que dans ce cas le schéma W peut être contenu dans une seule hypersurface lisse.

Si $d \geq e - 1$, c'est-à-dire si I_W est engendré en degré inférieur ou égal à d, Kleinman et Altman montrent qu'il existe une condition suffisante simple portant sur la dimension des espaces tangents à W pour qu'une hypersurface générique de classe $c_1(\mathcal{O}(d))$ contenant W soit lisse.

Si $d \geq e$, nous montrons ci-dessous que cette condition devient nécessaire. Dans ce cas le fait que W soit contenu dans une hypersurface lisse de classe $c_1(\mathcal{O}(d))$ est donc entièrement déterminé par la dimension des espaces tangents à W, contrairement au cas $d < e$.

Plus précisément, pour tout $c \in \{0, \dots, N - n + 1\}$ posons

$$W_c = \{x \in W \mid \operatorname{codim}(T_x W, T_x Y) = c\},$$

où $T_x W$ désigne l'espace tangent de Zariski à W en x : si $\mathcal{I}_{W,x}$ désigne l'idéal de l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,x}$ et d la différentielle, alors $T_x W = \bigcap_{q \in \mathcal{I}_{W,x}} \operatorname{Ker} dq_x$. L'espace W_c est un ensemble algébrique localement fermé.

Considérons les assertions suivantes, où δ est un entier.

(a) *Il existe un entier $d \geq \delta$ et une hypersurface lisse de Y de classe $c_1(\mathcal{O}(d))$ contenant W.*

(b) *Pour tout $c \in \{0, \dots, N - n + 1\}$ nous avons $\dim W_c < c$.*

(c) *Nous avons $N \geq 2n$. De plus, pour tout $r \in \{1, \dots, N - n + 1\}$, pour tout r-uplet $(e_1, \dots, e_r)$ d'entiers supérieurs ou égaux à δ et pour $(P_1, \dots, P_r) \in \prod_{i=1}^r I_W^{e_i}$ générique, le r-uplet $(P_1, \dots, P_r)$ définit une intersection complète et le lieu singulier du schéma $Z(P_1, \dots, P_r)$ est supporté par W et est de dimension inférieure ou égale à $r - 2$ (par convention, le lieu singulier d'une variété lisse est de dimension -1).*

(d) *Pour tout $r \in \{1, \dots, N - n + 1\}$, $r \neq N + 1$, pour tout r-uplet $(e_1, \dots, e_r)$ d'entiers supérieurs ou égaux à δ et pour $(P_1, \dots, P_r) \in \prod_{i=1}^r I_W^{e_i}$ générique le schéma $Z(P_1, \dots, P_r) \setminus W$ est connexe et lisse.*

L'implication $(c) \Rightarrow (a)$ est évidente.

D'après [K-A], nous avons $(b) \Rightarrow (c)$ pour $\delta \geq e - 1$ et $(b) \Rightarrow (d)$ pour $\delta \geq e$ et $r \neq N - n + 1$.

Proposition 1 *Pour $\delta \geq e$, les assertions (a), (b) et (c) sont équivalentes et elles impliquent l'assertion (d).*

L'implication $(a) \Rightarrow (c)$ donne le théorème 1.

1.2 Preuve de la proposition 1

Il suffit de montrer $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (d)$ pour $r = N - n + 1$.

1.2.1 Preuve de $(a) \Rightarrow (b)$

Soit $x \in W_c$, soit $L \in \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(1))$ une forme linéaire ne s'annulant pas en x et soit U un voisinage de Zariski ouvert de x dans W_c tel que L ne s'annule pas sur U. En choisissant $x \in W_c$ dans une composante irréductible de dimension maximale de W_c nous pouvons supposer U de même dimension que W_c. Posons

$$E = \mathrm{Coker}\,(TW_{|W_c} \to TY_{|W_c})^\vee_{|U}.$$

C'est un fibré vectoriel de rang c sur U.

L'espace E_x s'identifie canoniquement à $(T_xY/T_xW)^\vee$; il est donc engendré par les formes différentielles d_xq où q décrit l'idéal $\mathcal{I}_{W,x}$. Cet idéal est engendré en tant que $\mathcal{O}_{Y,x}$-module par les éléments de la forme $\frac{Q}{L^{\deg Q}}$, où $Q \in I_W$ est un élément homogène. L'espace $\mathrm{H}^0(U, E)$ est donc engendré par l'image des applications $d^{L,i} : I^i_W \to \mathrm{H}^0(U, E)$, $Q \mapsto d\left(\frac{Q}{L^i}\right)$ où i décrit $\mathbb{N}$. Remarquons que $d^{L,i}Q$ s'annule en x si et seulement si l'hypersurface X_Q est singulière en x.

Comme I_W est engendré en degré inférieur ou égal à $\delta - 1$, donc à $d - 1$, l'image de $d^{L,d-1}$ dans $\mathrm{H}^0(U, E)$ engendre le fibré E. Donc l'image de $d^{L,d}$ engendre les 1-jets de E, *i.e.* l'image de $d^{L,d}$ engendre E et pour tout $x \in E$ les différentielles des éléments de l'image de $d^{L,d}$ qui s'annulent en x engendrent $E_x \otimes T_xU^\vee$. En effet, si $L' \in \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(1))$ est une forme linéaire s'annulant en x et si $Q \in I^{d-1}_W$, alors la section $d^{L,d}(QL')$ s'annule en x et $d_x(d^{L,d}(QL')) = d^{L,d-1}Q \otimes d_x\left(\frac{L'}{L}\right)$; l'énoncé résulte alors de ce que les $d^{L,d-1}Q$ engendrent E et les $d_x\left(\frac{L'}{L}\right)$ engendrent $T_xU^\vee$.

Quitte à restreindre U nous pouvons le supposer trivial ; l'espace $\mathrm{H}^0(U, E)$ s'identifie alors aux fonctions algébriques de U dans $\mathbb{C}^c$. Par l'hypothèse (a), il existe $Q \in I^d_W$ tel que X_Q est lisse. Comme la lissité est une propriété ouverte, pour $Q \in I^d_W$ générique X_Q est lisse ; la fonction $d^{L,d}Q$ ne s'annule nulle part sur U. L'assertion (b) résulte donc par contraposée du lemme suivant appliqué à $\Sigma = d^{L,d}(I^d_W)$. □

Lemme 1 *Soit U une variété lisse de dimension supérieure ou égale à c et Σ un sous-espace de l'espace des fonctions algébriques de U dans $\mathbb{C}^c$ qui engendre les 1-jets. Alors pour $\sigma \in \Sigma$ générique, le lieu $\sigma^{-1}(0)$ est non vide.*

Preuve. — Comme Σ engendre les 1-jets et que $\dim X \geq c$, il existe $(\sigma, x) \in \Sigma \times U$ tels que $\sigma(x) = 0$ et la différentielle $d_x\sigma : T_xU \to \mathbb{C}^c$ est surjective.

Notons $\mathrm{ev}\colon \Sigma \times U \to \mathbb{C}^c$ l'application $(\tau, y) \mapsto \tau(y)$ et posons $\Theta = \mathrm{ev}^{-1}(0)$. Nous avons $(\sigma, x) \in \Theta$. Considérons alors le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_xU \arrow[r, "d_x(\sigma,\cdot)"] \arrow[d, "d_x\sigma"] & T_{\sigma,x}\Sigma \times U \arrow[r, "d_{\sigma,x}\pi"] \arrow[d, "d_{\sigma,x}\mathrm{ev}"] & T_\sigma\Sigma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^c \arrow[r] & \mathbb{C}^c \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\pi\colon \Sigma \times U \to \Sigma$ désigne la projection. Par chasse au diagramme, la surjectivité de $d_x\sigma$ implique que la restriction de $d_{\sigma,x}\pi$ à $\mathrm{Ker}\ d_{\sigma,x}\mathrm{ev} = T_{\sigma,x}\Theta$ est surjective. □

1.2.2 Preuve de $(b) \Rightarrow (d)$

D'après [K-A], pour $(P_1, \ldots, P_{N-n}) \in \Pi_{i=1}^{N-n} I_W^{e_i}$ générique le schéma $Z(P_1, \ldots, P_{N-n}) \setminus W$ est connexe et lisse. Fixons $(P_1, \ldots, P_{N-n})$ comme ci-dessus, choisissons $P_{N-n+1} \in I_W^{e_{N-n+1}}$, posons $Y' = Z(P_1, \ldots, P_{N-n})$ et $X' = Y' \cap Z(P_{N-n+1})$. Nous devons montrer que pour $P_{N-n+1} \in I_W^{e_{N-n+1}}$ générique le schéma $X' \setminus W$ est connexe et lisse.

Notons $\pi' : \widetilde{Y'} \to Y'$ l'éclaté de Y' le long de W, E' le diviseur exceptionnel et $\widetilde{X'}$ le transformé strict de X'. Ainsi $\widetilde{X'}$ est une hypersurface de $\widetilde{Y'}$, isomorphe à l'éclaté de X' le long de W, section du fibré $\mathcal{L}'$ sur $\widetilde{Y'}$ de classe $e_{N-n+1}{\pi'}^* c_1(\mathcal{O}_Y(1)) - c_1(E')$. Comme les sections de $\mathcal{L}'$ sont en bijection avec $I_W^{e_{N-n+1}}$ et que I_W est engendré en degré $e - 1 < \delta \leq e_{N-n+1}$, le fibré $\mathcal{L}'$ est très ample. D'autre part, le schéma $\widetilde{Y'} \setminus E' \simeq Y' \setminus W$ est connexe et lisse, de dimension $n + 1 \geq 2$ (puisque $N - n + 1 \neq N + 1$) ; le théorème de Bertini classique (*cf.* par exemple [K-A]) implique alors que pour $P_{N-n+1} \in I_W^{e_{N-n+1}}$ générique le schéma $X' \setminus (E' \cap X') \simeq X' \setminus W$ est irréductible et lisse, donc connexe et lisse. $\square$

2 Les résultats de monodromie

2.1 Notations et rappels sur la théorie de Lefschetz

Dans cette section nous rappelons des résultats dus essentiellement à Lefschetz (sauf le théorème de Lefschetz difficile) et expliqués en détail dans [L]. Nous les utiliserons librement dans les parties 2 et 3.

Le théorème 2 affirme essentiellement l'irréductibilité d'une action de monodromie ; nous l'énonçons pour l'homologie complexe, qui donne le résultat le plus fort ; nous nous plaçons donc dans ce cadre : sauf mention explicite du contraire, tous les espaces d'homologie considérés dans les parties 2 et 3 sont à coefficients complexes.

2.1.1 Homologie primitive, évanescente, relative

Homologie primitive. — Soit N un entier strictement positif et soit Y une variété projective lisse de dimension $N + 1$ munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{L}$. Nous appelons homologie primitive de Y les espaces

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_i(Y)^{\mathrm{prim}} &= \mathrm{Coker}\,(c_1(\mathcal{L}) : \mathrm{H}_{i+2}(Y) \to \mathrm{H}_i(Y)) \quad \text{et} \\ \mathrm{H}_i(Y)_{\mathrm{prim}} &= \mathrm{Ker}\,(c_1(\mathcal{L}) : \mathrm{H}_i(Y) \to \mathrm{H}_{i-2}(Y)), \end{aligned}$$

et nous posons $\mathrm{h}_i(Y)^{\mathrm{prim}} = \dim \mathrm{H}_i(Y)^{\mathrm{prim}}$. Nous avons $\mathrm{H}_{2N+2-i}(Y)_{\mathrm{prim}} = \mathrm{H}_i(Y)^{\mathrm{prim}} = 0$ pour $i \in \{0, \ldots, N\}$.

Homologie évanescente. — Soit X une hypersurface projective lisse de Y de classe $c_1(\mathcal{L})$ et soit $j : X \to Y$ l'immersion fermée. Nous appellons homologie évanescente les espaces

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_i(X)_{\mathrm{ev}} &= \mathrm{Ker}\,(j_* : \mathrm{H}_i(X) \to \mathrm{H}_i(Y)) \quad \text{et} \\ \mathrm{H}_i(X)^{\mathrm{ev}} &= \mathrm{Coker}\,(j^* : \mathrm{H}_{i+2}(Y) \to \mathrm{H}_i(X)). \end{aligned}$$

L'homologie évanescente de X dépend à priori du plongement $j : X \to Y$. Cependant, si X définit un diviseur très ample dans deux variétés lisses Y et Y', et s'il existe une variété lisse Z telle que $Y \subset Z$ et $Y' \subset Z$ sont des produits d'intersection de diviseurs très amples, alors les homologies évanescentes de X pour les plongements $X \to Y$ et $X \to Y'$ coïncident. Dans cet article, nous nous trouvons toujours dans cette situation.

Nous avons $\mathrm{H}_i(X)_{\mathrm{ev}} = \mathrm{H}_i(X)^{\mathrm{ev}} = 0$ pour $i \in \{0, \ldots, 2N\} \setminus \{N\}$. La forme d'intersection induit un isomorphisme canonique $\mathrm{H}_N(X)_{\mathrm{ev}} \simeq \mathrm{H}_N(X)^{\mathrm{ev}}$; nous notons $\mathrm{h}_N(X)_{\mathrm{ev}}$ la dimension de cet espace.

Homologie relative et homologie du complémentaire. — Notons $\mathcal{V}^i \subset \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{L})$ l'ouvert paramétrant (à la multiplication par un scalaire près) les hypersurfaces lisses de classe $c_1(\mathcal{L})$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, 2N\}$ nous avons les suites exactes de $\pi_1(\mathcal{L})$-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{i+1}(Y)^{\mathrm{prim}} \xrightarrow{\mathrm{rel}} \mathrm{H}_{i+1}(Y, X) \xrightarrow{\mathrm{bord}} \mathrm{H}_i(X)_{\mathrm{ev}} \longrightarrow 0, \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_i(X)^{\mathrm{ev}} \xrightarrow{\mathrm{tube}} \mathrm{H}_{i+1}(Y \setminus X) \xrightarrow{\mathrm{ouv}} \mathrm{H}_{i+1}(Y)_{\mathrm{prim}} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Ces suites exactes sont duales pour les formes d'intersection sur X et sur Y ; en particulier, nous avons des isomorphismes canoniques $\mathrm{H}_{i+1}(Y, X) \simeq \mathrm{H}_{2N-i+1}(Y \setminus X)^{\vee}$.

2.1.2 Monodromie

Nous introduisons les notations suivantes. Si B_* désigne un ouvert de Y nous notons Γ_* son complémentaire, $\overline{B}_*$ son adhérence et Σ_* le bord de $\overline{B}_*$. Pour tout sous-espace Z de Y nous posons $B_*^Z = Z \cap B_*$, $\overline{B}_*^Z = Z \cap \overline{B}_*$, $\Gamma_*^Z = Z \cap \Gamma_*$ et $\Sigma_*^Z = Z \cap \Sigma_*$. Nous notons $\beta_{B,Z} : \mathrm{H}_\bullet(B_*^Z) \to \mathrm{H}_\bullet(Z)$ le morphisme induit par l'immersion fermée $B_* \to Z$ et $\gamma_{B,Z} : \mathrm{H}_\bullet(Z) \to \mathrm{H}_\bullet(\overline{B}_*^Z, \Sigma_*^Z)$ la composée du morphisme rel : $\mathrm{H}_\bullet(Z) \to \mathrm{H}_\bullet(Z, \Gamma_*^Z)$ avec l'isomorphisme d'excision $\mathrm{H}_\bullet(Z, \Gamma_*^Z) \to \mathrm{H}_\bullet(\overline{B}_*^Z, \Sigma_*^Z)$.

Soit $D \subset \mathbb{P}\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{L})$ un pinceau de Lefschetz d'hypersurfaces de Y. Notons $\{P_1, \ldots, P_r\} \subset D$ ses points critiques : pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ l'hypersurface associée à P_i possède un unique point double ordinaire noté x_i. Posond $D^* = D \setminus \{P_i, \ldots, P_r\}$

Nous fixons $i \in \{1, \ldots, r\}$. Soit B_i un voisinage de x_i dans Y homéomorphe à une boule ouverte. D'après la théorie de Morse, pour B_i assez petit, il existe un voisinage D_i de P_i dans D homéomorphe à un disque fermé et ne rencontrant pas les P_j, $j \neq i$ tel que la famille de variétés à bord (Γ_i^X, Σ_i^X) est topologiquement triviale pour X décrivant la famille d'hypersurfaces paramétrée par D_i, et que la famille B_i^X est topologiquement localement triviale pour X décrivant la famille d'hypersurfaces paramétrée par $D_i \setminus \{P_i\}$.

Soit F_i un point de $D_i \setminus \{P_i\}$ définissant une hypersurface $X_i \subset Y$: la variété $B_i^{X_i}$ est alors homéomorphe à un sous-fibré en boules ouvertes de dimension N du fibré tangent à la sphère réelle $\mathcal{S}^N$ et la variété $\Sigma_i^{X_i}$ est homéomorphe à un sous-fibré en sphères réelles de dimension $N-1$ du fibré tangent à $\mathcal{S}^N$. L'espace $\mathrm{H}_N(B_i^{X_i})$ est donc isomorphe à $\mathbb{C}$ et est engendré par la classe de l'image de la section nulle, que nous notons $\delta_i^{B_i}$. L'espace $\mathrm{H}_N(\overline{B}_i^{X_i}, \Sigma_i^{X_i})$ est le dual de $\mathrm{H}_N(B_i^{X_i})$ pour la forme d'intersection, engendré par la classe d'une boule-fibre, qui donc coupe transversalement la section nulle. L'application γ_{B_i,X_i} est la transposée de β_{B_i,X_i}.

Nous posons $\delta_i = \beta_{B_i,X_i}(\delta_i^{B_i})$. Soit $W_i \subset D_i \setminus P_i$ un lacet d'origine F_i faisant le tour de P_i et soit $g_i \in \pi_1(D_i \setminus P_i, F_i)$ sa classe d'homotopie. La formule de Picard-Lefschetz affirme que pour tout $\lambda \in \mathrm{H}_N(X_i)$ nous avons

$$g_i(\lambda) = \lambda + \varepsilon\langle\lambda|\delta_i\rangle\delta_i, \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 1 \text{ ou } -1.$$

Soit F un point de D^* définissant une hypersurface X ; pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ soit $L_i \subset D^*$ un chemin reliant F à F_i, induisant par transport plat un isomorphisme $\mathrm{H}_N(X) \simeq \mathrm{H}_N(X_i)$; nous appelons *cycle évanecsent* associé à P_i et nous notons abusivement $\delta_i \in \mathrm{H}_N(X)$ la préimage de $\delta_i \in \mathrm{H}_N(X_i)$ et $g_i \in \pi_1(D^*, F)$ la classe d'homotopie du lacet $L_i^{-1}W_iL_i$. La formule de Picard-Lefschetz implique alors que pour tout $\lambda \in \mathrm{H}_N(X)$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ nous avons $g_i(\lambda) = \lambda + \varepsilon\langle\lambda|\delta_i\rangle\delta_i$, avec $\varepsilon = 1$ ou -1. La théorie de Lefschetz affirme d'autre part $\delta_i \in \mathrm{H}_N(X_i)_{\mathrm{ev}}$ et que l'homologie évanescente $\mathrm{H}_N(X)_{\mathrm{ev}}$ est engendrée par les cycles δ_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ et que ces cycles sont conjugués sous l'action de monodromie de $\pi_1(D^*, F)$. Ceci implique que l'action de monodromie de $\pi_1(D^*, F)$ sur $\mathrm{H}_N(X)_{\mathrm{ev}}$ est irréductible.

2.2 Quelques résultats de monodromie globale

2.2.1 Monodromie du complémentaire d'une hypersurface

Nous adoptons les notation de la section 2.1.2. Le groupe $\pi_1(\mathcal{V}, F)$ agit par monodromie sur les suites exactes (1) et (2). Son action est triviale sur $\mathrm{H}_{N+1}(Y)_{\mathrm{prim}}$ et sur $\mathrm{H}_{N+1}(Y)^{\mathrm{prim}}$ et elle est irréductible sur $\mathrm{H}_N(X)_{\mathrm{ev}}$ et sur $\mathrm{H}_N(X)^{\mathrm{ev}}$. La suite exacte (1) montre que les seules classes $\pi_1(\mathcal{V}, F)$-invariantes dans $\mathrm{H}_{N+1}(Y, X)$ sont celles appartenant à $\mathrm{rel}(\mathrm{H}_{N+1}(Y)^{\mathrm{prim}})$, et que toutes les autres classes engendrent une $\pi_1(\mathcal{V}, F)$-représentation de dimension supérieure ou égale à $\mathrm{h}_N(X)_{\mathrm{ev}}$. L'énoncé analogue pour la suite exacte (2) est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2 *Une classe non nulle $\Lambda \in \mathrm{H}_{N+1}(Y \setminus X)$ engendre la $\pi_1(\mathcal{V}, F)$-représentation $\mathbb{C}\Lambda + \mathrm{tube}\, \mathrm{H}_N(X)^{\mathrm{ev}}$.*

Preuve. — Nous pouvons supposer $F \in D^*$; il suffit alors de montrer le résultat pour $\pi_1(D^*, F)$ au lieu de $\pi_1(\mathcal{V}, F)$ Nous fixons $i \in \{1, \ldots, r\}$. Considérons la la suite exacte longue d'homologie relative du couple $(B_i^{X_i}, B_i)$: comme $\mathrm{H}_{N+1}(B_i) = \mathrm{H}_N(B_i) = 0$, nous avons un isomorphisme $\mathrm{bord}_{B_i} : \mathrm{H}_{N+1}(B_i, B_i^{X_i}) \to \mathrm{H}_N(B_i^{X_i})$. Nous notons $\Delta_i^{B_i}$ la préimage de $\delta_i^{B_i}$ par bord_{B_i}.

Soit $\beta_{B_i,Y,X_i} : \mathrm{H}_{N+1}(B_i, B_i^{X_i}) \to \mathrm{H}_{N+1}(Y, X_i)$ le morphisme induit par les inclusions $B_i \to Y$ et $B_i^{X_i} \to X_i$ (le morphisme β_{B_i,Y,X_i} est le transposé de $\gamma_{B_i,Y\setminus X} : \mathrm{H}_{N+1}(Y \setminus X_i) \to \mathrm{H}_{N+1}(\overline{B}_i^{Y\setminus X_i}, \Sigma_i^{Y\setminus X_i})$ pour la forme d'intersection). Nous notons Δ_i l'image de $\Delta_i^{B_i}$ par β_{B_i,Y,X_i}. Nous avons $\mathrm{bord}\, \Delta_i = \delta_i$.

Lemme 2 (Formule de Picard-Lefschetz pour le complémentaire) *Pour tout $\Lambda \in \mathrm{H}_{N+1}(Y \setminus X_i)$ nous avons*

$$g_i(\Lambda) = \Lambda + \varepsilon\langle\Lambda|\Delta_i\rangle\mathrm{tube}\,(\delta_i), \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 1 \text{ ou } -1.$$

Preuve. — Nous distiguons les cas $\delta_i = 0$ et $\delta_i \neq 0$.

Si $\delta_i = 0$ alors $\operatorname{tube}\delta_i = 0$; nous devons donc montrer $g_i = \mathrm{id}$. Considérons la suite exacte longue d'homologie relative du couple $(B_i^{Y\setminus X_i}, B_i)$: comme $\mathrm{H}_{N+2}(B_i) = \mathrm{H}_{N+1}(B_i) = 0$ et grâce à l'isomorphisme de Thom $\mathrm{H}_{N+2}(B_i, B_i^{Y\setminus X_i}) \simeq \mathrm{H}_N(B_i^{X_i})$, nous avons un isomorphisme $\operatorname{tube}_{B_i} : \mathrm{H}_N(B_i^{X_i}) \to \mathrm{H}_{N+1}(B_i^{Y\setminus X_i})$. Comme l'espace $\mathrm{H}_N(B_i^{X_i})$ est engendré par $\delta_i^{B_i}$, l'espace $\mathrm{H}_{N+1}(B_i^{Y\setminus X_i})$ est donc engendré par $\operatorname{tube}_{B_i}(\delta_i^{B_i})$. Or nous avons $\beta_{B_i, Y\setminus X_i}(\operatorname{tube}_{B_i}(\delta_i^{B_i})) = \operatorname{tube}(\beta_{B_i,X_i}(\delta_i^{B_i})) = \operatorname{tube}(\delta_i) = 0$; le morphisme $\beta_{B_i,Y\setminus X_i} : \mathrm{H}_{N+1}(B_i^{Y\setminus X_i}) \to \mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i)$ est donc nul. Le morphisme rel : $\mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i) \to \mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i, B_i^{Y\setminus X_i})$ est donc injectif ; en le composant avec l'isomorphisme d'excision $\mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i, B_i^{Y\setminus X_i}) \to \mathrm{H}_{N+1}(\Gamma_i^{Y\setminus X_i}, \Sigma_i^{Y\setminus X_i})$, nous obtenons un morphisme injectif $\mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i) \to \mathrm{H}_{N+1}(\Gamma_i^{Y\setminus X_i}, \Sigma_i^{Y\setminus X_i})$. Le lemme résulte alors de ce que la famille de variétés à bord $(\Gamma_i^{Y\setminus X_t}, \Sigma_i^{Y\setminus X_t})$ est topologiquement triviale pour X_t décrivant la famille d'hypersurfaces paramétrée par D_i.

Si $\delta_i \neq 0$, le morphisme $\beta_{B_i,X_i} : \mathrm{H}_N(B_i^{X_i}) \to \mathrm{H}_N(X_i)$ est injectif, et comme $\operatorname{bord}_{B_i} : \mathrm{H}_{N+1}(B_i, B_i^{X_i}) \to \mathrm{H}_N(B_i^{X_i})$ est un isomorphisme, le morphisme composé $\beta_{B_i,X_i} \circ \operatorname{bord}_{i_B} : \mathrm{H}_{N+1}(B_i, B_i^{X_i}) \to \mathrm{H}_N(X_i)$ est injectif. Nous avons $\beta_{B_i,X_i} \circ \operatorname{bord}_{B_i} = \operatorname{bord} \circ \beta_{B_i,Y,X_i}$; le morphisme transposé est donc le morphisme surjectif $\gamma_{B_i,Y\setminus X_i} \circ \operatorname{tube} : \mathrm{H}_N(X_i) \to \mathrm{H}_{N+1}(\overline{B}_i^{Y\setminus X_i}, \Sigma_i^{Y\setminus X_i})$. En particulier, le noyau de $\gamma_{B_i,Y\setminus X_i} : \mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i) \to \mathrm{H}_{N+1}(\overline{B}_i^{Y\setminus X_i}, \Sigma_i^{Y\setminus X_i})$ et l'image de $\operatorname{tube} : \mathrm{H}_N(X_i) \to \mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i)$ engendrent $\mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i)$: pour tout $\Lambda \in \mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X_i)$ il existe $\Lambda_\gamma \in \operatorname{Ker} \gamma_{B_i,Y\setminus X_i}$ et $\lambda \in \mathrm{H}_N(X_i)$ tels que $\Lambda = \Lambda_\gamma + \operatorname{tube}\lambda$. Comme la classe Λ_γ est à support dans $\Gamma_i^{Y\setminus X_i}$, elle n'intersecte pas Δ_i, et comme la famille $(\Gamma_i^{Y\setminus X_t})$ est topologiquement triviale pour X_t décrivant la famille d'hypersurfaces paramétrée par D_i, la classe Λ_γ est g_i-invariante ; la formule du lemme est donc vraie pour Λ_γ. D'autre part, comme $\operatorname{bord}\Delta_i = \delta_i$ et que bord est la transposée de tube, la formule du lemme pour $\operatorname{tube}\lambda$ résulte immédiatement de la formule de Picard-Lefschetz usuelle. □

Remarque. — Il existe une formule duale pour l'homologie relative : pour tout $\Lambda \in \mathrm{H}_{N+1}(Y, X_i)$ et nous avons $g_i(\Lambda) = \Lambda + \varepsilon\langle\lambda \mid \operatorname{tube}\delta_i\rangle\, \Delta_i$ avec $\varepsilon = 1$ ou -1.

Fin de la preuve de la proposition 2. — Soit $\Lambda \in \mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X)\setminus\{0\}$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ nous notons abusivement $\Delta_i \in \mathrm{H}_N(Y, X)$ la préimage de $\Delta_i \in \mathrm{H}_N(Y, X_i)$ par transport plat le long du chemin L_i. D'après [V], proposition 2.27, les cycles Δ_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ engendrent $\mathrm{H}_{N+1}(Y, X)$. Comme la forme d'intersection induit une dualité parfaite $\mathrm{H}_{N+1}(Y, X) \simeq \mathrm{H}_{N+1}(Y\setminus X)^\vee$, il existe donc un entier $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\langle\Lambda \mid \Delta_i\rangle \neq 0$. D'après la formule de Picard-Lefschetz pour le complémentaire, nous avons alors $\operatorname{tube}\delta_i = \frac{\varepsilon}{\langle\Lambda|\Delta_i\rangle}(g_i(\Lambda) - \Lambda)$; la classe $\operatorname{tube}\delta_i$ appartient donc à la représentation engendrée par Λ.

Comme l'action de $\pi_1(D^*, F)$ sur $\mathrm{H}_N(X)_{\mathrm{ev}}$ est irréductible et commute avec l'application tube, la $\pi_1(D^*, F)$-représentation engendrée par Λ contient $\operatorname{tube}\mathrm{H}_N(X)^{\mathrm{ev}}$. La proposition 2 résulte alors de ce que l'espace $\mathbb{C}\Lambda + \operatorname{tube}\mathrm{H}_N(X)^{\mathrm{ev}}$ est $\pi_1(D^*, F)$-invariant. □

2.2.2 Étude de $\mathrm{H}_N(X \setminus (X_K \setminus C_K))$

Dans cette section nous montrons un résultat préliminaire qui décrit l'homologie d'une variété intervenant dans la proposition 4. Il sert dans les sections 2.2.3 et 2.3, où nous nous trouverons dans l'une des situations décrites ci-dessous.

Situation générale (sections 2.3 et 3.2) — Soient N, d et e des entiers strictement positifs tels que $N \geq 2$ et $e < d$, et soit Y une variété projective lisse de dimension $N+1$ munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}(1)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(i)) \setminus \{0\}$ nous notons X_S l'hypersurface associée et $j_S : X_S \to Y$ l'immersion fermée. Si X_A, X_K et X_Q sont des hypersurfaces de Y, nous posons $X_{A,K} = X_A \cap X_K$ et $X_{A,K,Q} = X_A \cap X_K \cap X_Q$; nous notons $j^A_{A,K} : X_{A,K} \to X_A$, $j^{A,K}_{A,K,Q} : X_{A,K,Q} \to X_{A,K}$, $j^A_{A,K,Q} : X_{A,K,Q} \to X_A$, $j_{A,K} : X_{A,K} \to Y$ et $j_{A,K,Q} : X_{A,K,Q} \to Y$ les immersions fermées.

Fixons $A \in \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(i)) \setminus \{0\}$ tel que X_A est lisse. Notons $\mathcal{V}^i \subset \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(i))$, et ${}^A\mathcal{V}^i \subset \mathrm{H}^0(X_A, \mathcal{O}(i))$ les ouverts paramétrant (à la multiplication par un scalaire près) les hypersurfaces lisses de Y et de X_A de classe $c_1(\mathcal{O}(i))$. Fixons ensuite $Q \in \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(d))$ en intersection complète avec A. Notons $\mathcal{V}^i_{A,Q} \subset \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(i))$ l'espace des éléments K en intersection complète avec A et Q et tels que les variétés X_K, $X_{A,K}$ et $X_{A,K,Q}$ sont lisses. Notons ${}^A\mathcal{V}^i_Q \subset \mathrm{H}^0(X_A, \mathcal{O}(i))$ l'espace des éléments K en intersection complète avec $Q_{|X_A}$ tels que les variétés $X_{A,K}$ et $X_{A,K,Q}$ sont lisses. Remarquons que les espaces $\mathcal{V}^i_{A,Q}$ et ${}^A\mathcal{V}^i_Q$ sont non vides si et seulement si la variété $X_{A,Q}$ a au plus des singularités isolées. Le morphisme de restriction ${}^A\psi^i : \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(i)) \to \mathrm{H}^0(X_A, \mathcal{O}(i))$ envoie $\mathcal{V}^i_{A,Q}$ sur ${}^A\mathcal{V}^i_Q \cap \mathrm{Im}\, {}^A\psi^i$.

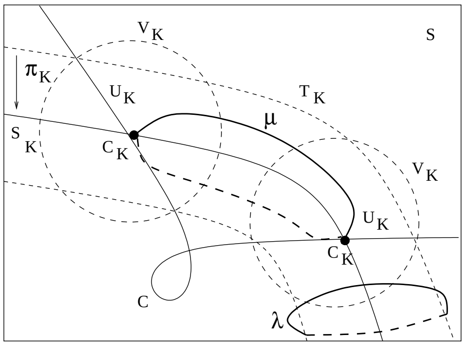
Situation particulière (section 2.2.3). — Soit d un entier strictement positif, soit S une surface projective lisse munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}(1)$ et soit C une courbe réduite de S. Pour tout $K \in \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}(d)) \setminus \{0\}$ notons S_K la courbe associée, posons $C_K = S_K \cap C$ et notons $j^C_K : C_K \to C$ l'immersion fermée. Notons $\mathcal{V} \subset \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}(d))$ l'ouvert paramétrant (à la multiplication par un scalaire près) les courbes lisses de S de classe $c_1(\mathcal{O}(d))$ et $\mathcal{V}_C \subset \mathcal{V}$ l'ouvert des éléments K tels que le schéma C_K est lisse de dimension 0.

Remarquons que si nous posons $S = X_A$, la situation générale dans le cas $N = 2$ permet de retrouver la situation particulière avec l'hypothèse supplémentaire que la courbe C est de classe $c_1(\mathcal{O}(d))$.

Nous nous plaçons soit dans la situation particulière et fixons $K \in \mathcal{V}_C$, soit dans la situation générale et fixons $K \in {}^A\mathcal{V}^{d-e}_Q$. Le lemme 3 ci-dessous emprunte ses notations à la situation particulière ; il est encore vrai dans la situation générale avec les notations $S = X_A$, $C = X_{A,Q}$, $S_K = X_{A,K}$, $C_K = X_{A,K,Q}$, $\mathcal{V} = {}^A\mathcal{V}^{d-e}$ et $\mathcal{V}_C = {}^A\mathcal{V}^{d-e}_Q$.

Lemme 3 *Pour tout $i \in \mathbb{N}$ nous avons le diagramme suivant de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-modules. Il est commutatif et ses lignes sont des suites exactes.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{H}_i(C) \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "(j^C_K)^*"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_i(S \setminus S_K) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\text{ouv}"] & \mathrm{H}_i(S \setminus (S_K \setminus C_K)) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}_{i-2}(C_K) \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{H}_i(S) & \mathrm{H}_i(S \setminus (S_K \setminus C_K)) \arrow[l, "v"'] & \mathrm{H}_{i-1}(S_K, C_K) \arrow[l, "u"'] \arrow[u, "\text{bord}"'] & \mathrm{H}_{i+1}(S). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$



DESSIN 1 Exemples de cycles de $\mathrm{H}_N(S \setminus (S_K \setminus C_K))$: $\lambda \in \alpha(\mathrm{H}_N(S \setminus S_K))$, $\mu \in u(\mathrm{H}_{N-1}(S_K, C_K))$

Les flèches α, v et ϕ sont induites par les immersions. Les flèches ψ et u sont définies dans la preuve. Si $\mathrm{h}_i(S_K)_{\mathrm{ev}} \neq 0$ *alors* $\mathrm{Im}\,(\phi) \cap \mathrm{Im}\,(\alpha) = 0$.

Le dessin 1 donne des exemples de cycles de $\mathrm{H}_N(S \setminus (S_K \setminus C_K))$.

Preuve. — Les lignes du diagramme se déduisent des suites exactes longues d'homologie relative des couples
- $(S \setminus (S_K \setminus C_K), S \setminus S_K)$ pour la première ligne et
- $(S, S \setminus (S_K \setminus C_K))$ pour la seconde ligne.

Nous devons montrer les assertions suivantes.

1. Nous avons des isomorphismes de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-modules $\mathrm{H}_i(S \setminus (S_K \setminus C_K), S \setminus S_K) \simeq \mathrm{H}_{i-2}(C_K)$ et le triangle du diagramme est commutatif.
2. Nous avons des isomorphismes de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-modules $\mathrm{H}_{i+1}(S, S \setminus (S_K \setminus C_K)) \simeq \mathrm{H}_{i-1}(S_K, C_K)$ et le rectangle de droite du diagramme est commutatif (la commutativité du rectangle de gauche est évidente).
3. La première ligne est exacte à gauche et à droite, autrement dit les morphismes de liaison $\mathrm{H}_{i-2}(C_K) \to \mathrm{H}_{i-1}(S \setminus S_K)$ sont nuls ; nous distinguons les cas
   (a) $i \leq \dim S$ et
   (b) $i > \dim S$.
4. Si $\mathrm{h}_i(S_K)_{\mathrm{ev}} \neq 0$ alors $\mathrm{Im}\,(\phi) \cap \mathrm{Im}\,(\alpha) = 0$.

Comme les variétés S_K et C_K sont lisses et que la variété C est lisse au voisinage de C_K, il existe des voisinages tubulaires ouverts V_K de C_K dans S, U_K de C_K dans C et T_K de S_K dans S tels que $U_K = C \cap V_K = C \cap T_K$ (*cf.* dessin 1). La construction de ces voisinages tubulaires pour C et S_K s'étend à une famille paramétrée par $\mathcal{V}_C$, ce qui assure la compatibilité des constructions ci-dessous avec l'action de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$.

Preuve de l'assertion 1. — Remarquons que $V_K \setminus (S_K \cap V_K)$ se rétracte par déformation sur $U_K \setminus C_K$. Par excision, rétraction et isomorphisme de Thom nous avons alors les isomorphismes successifs

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_i(S \setminus (S_K \setminus C_K), S \setminus S_K) &\simeq \mathrm{H}_i(V_K \setminus ((S_K \setminus C_K) \cap V_K), V_K \setminus (S_K \cap V_K)) \\
&\simeq \mathrm{H}_i(U_K, U_K \setminus C_K) \\
&\simeq \mathrm{H}_{i-2}(C_K).
\end{aligned}$$

La commutativité du triangle du diagramme s'obtient en prenant l'image réciproque de ces isomorphismes dans $\mathrm{H}_i(C, C \setminus C_K)$ et en observant que le morphisme $(j_K^C)^* : \mathrm{H}_i(C) \to \mathrm{H}_{i-2}(C_K)$ se factorise par $\mathrm{H}_i(C, C \setminus C_K) \simeq \mathrm{H}_i(U_K, U_K \setminus C_K)$.

Preuve de l'assertion 2. — Comparons la suite exacte longue d'homologie relative du couple (S_K, C_K) à celle du triplet $(S, S \setminus (S_K \setminus C_K), S \setminus S_K)$: pour tout $j \in \mathbb{N}$ nous avons des isomorphismes de Thom $\mathrm{H}_{j-2}(S_K) \simeq \mathrm{H}_j(S, S \setminus S_K)$, et, par l'assertion 1, $\mathrm{H}_j(S \setminus (S_K \setminus C_K), S \setminus S_K) \simeq \mathrm{H}_{j-2}(C_K)$. D'autre part, la projection naturelle $\pi_K : T_K \to S_K$ induit le morphisme

$$\mathrm{H}_{i-1}(S_K, C_K) \xrightarrow{\pi_K^*} \mathrm{H}_{i+1}(T_K, T_K \setminus (S_K \setminus C_K)) \simeq \mathrm{H}_{i+1}(S, S \setminus (S_K \setminus C_K))$$

où le dernier isomorphisme est l'excision. L'isomorphisme $\mathrm{H}_{i+1}(S, S \setminus (S_K \setminus C_K)) \simeq \mathrm{H}_{i-1}(S_K, C_K)$ résulte alors du "lemme des 5".

Le rectangle de droite du diagramme est commutatif par cette construction. $\square$

Preuve de l'assertion 3a. — Par la suite exacte longue d'homologie relative du couple $(S \setminus (S_K \setminus C_K), S \setminus S_K)$ l'assertion 3a est équivalente à l'injectivité de $\alpha : \mathrm{H}_{i-1}(S \setminus S_K) \to \mathrm{H}_{i-1}(S \setminus (S_K \setminus C_K))$ pour $i - 1 \leq \dim S$; il suffit donc de montrer que le morphisme $\mathrm{ouv} = v \circ \alpha : \mathrm{H}_{i-1}(S \setminus S_K) \to \mathrm{H}_{i-1}(S)$ est injectif, ce qui résulte de ce que son noyau $\mathrm{H}_{i-2}(S_K)^{\mathrm{ev}}$ est nul pour $i \leq \dim S$. $\square$

Preuve de l'assertion 3b. — Dans la situation particulière nous avons $\dim S = 2$ et $\dim C_K = 0$, donc $\mathrm{H}_{i-2}(C_K) = 0$ pour $i > \dim S$ et l'assertion 3b est vraie. Nous nous plaçons donc dans la situation générale.

Par construction, les morphismes de liaison $\mathrm{H}_{i-2}(C_K) \to \mathrm{H}_{i-1}(S \setminus S_K)$ se factorisent par

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_{i-2}(C_K) \arrow[r, "\mathrm{thom}"] \arrow[d] & \mathrm{H}_i(U_K, U_K \setminus C_K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_i(S \setminus (S_K \setminus C_K), S \setminus S_K) \arrow[d] \\
\mathrm{H}_{i-2}(S_K) \arrow[r, "\mathrm{thom}"] \arrow[dr, "\mathrm{tube}"'] & \mathrm{H}_i(T_K, T_K \setminus S_K) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{bord}"] & \mathrm{H}_i(S, S \setminus S_K) \arrow[dl, "\mathrm{bord}"] \\
& \mathrm{H}_{i-1}(S \setminus S_K) &
\end{tikzcd}$$

où les flèches non nommées sont induites par les immersions. L'assertion 3b est équivalente à ce que l'image de $\mathrm{H}_{i-2}(C_K) \to \mathrm{H}_{i-2}(S_K)$ est incluse dans le noyau de $\mathrm{H}_{i-2}(S_K) \xrightarrow{\mathrm{tube}} \mathrm{H}_{i-1}(S \setminus S_K)$.

Or d'une part nous avons

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{H}_{i-2}(S_K) \xrightarrow{\mathrm{tube}} \mathrm{H}_{i-1}(S \setminus S_K)) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{H}_{i-2}(S_K) \to \mathrm{H}_{i-2}(S_K)^{\mathrm{ev}}) \ ;$$

d'autre part, comme $C \subset S$ est très ample, de classe un multiple rationnel de $c_1(\mathcal{L})$, pour $i > \dim S$ l'application de restriction $\mathrm{H}_i(S_K) \to \mathrm{H}_{i-2}(C_K)$ est surjective et nous avons

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{H}_{i-2}(C_K) \to \mathrm{H}_{i-2}(S_K)) = \mathrm{Coker}(\mathrm{H}_i(S_K) \xrightarrow{c_1(\mathcal{L})\frown} \mathrm{H}_{i-2}(S_K)) = \mathrm{H}_{i-2}(S_K)^{\mathrm{prim}}.$$

L'assertion 3b résulte alors de ce que $\mathrm{H}_{i-2}(S_K)^{\mathrm{ev}}$ est un quotient de $\mathrm{H}_{i-2}(S_K)^{\mathrm{prim}}$. $\square$

Preuve de l'assertion 4. — Elle se déduit de l'étude de l'action de monodromie $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ sur la première ligne du diagramme. La variété $\mathcal{V}_C$ est alors un ouvert de Zariski non vide de $\mathcal{V}$, le morphisme $\pi_1(\mathcal{V}_C, K) \to \pi_1(\mathcal{V}, K)$ est donc surjectif. Comme il factorise l'action de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ sur $\mathrm{H}_i(S \setminus S_K)$, d'après la proposition 2, si $\mathrm{h}_i(S_K)_{\mathrm{ev}} \neq 0$, l'espace $\mathrm{H}_i(S \setminus S_K)$ n'a pas de classes $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-invariantes. Comme le morphisme α est injectif, l'espace $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ n'a donc pas de classes $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-invariantes. Or l'espace $\mathrm{Im}\,(\phi)$ est $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-invariant, ce qui implique l'assertion 4. $\square$

2.2.3 Cas des surfaces

Dans cette section nous nous plaçons dans la situation particulière de la section 2.2.2. Nous faisons l'hypothèse supplémentaire $d \geq 2$. Pour toute partie $E \subset \mathrm{H}_2(S \setminus (S_K \setminus C_K))$ nous notons $H(E) \subset \mathrm{H}_2(S \setminus (S_K \setminus C_K))$ la $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-représentation engendrée par E.

Proposition 3 *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{H}_2(S \setminus (S_K \setminus C_K)) \setminus \mathrm{Im}\,(\phi)$ *nous avons* $\dim H(\lambda) \geq \mathrm{h}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$.

Preuve. — Nous supposons $\mathrm{h}_i(S_K)_{\mathrm{ev}} \neq 0$ et nous étudions le comportement de la classe λ dans le diagramme du lemme 3.

Si $\lambda \in \mathrm{Im}\,(\alpha) + \mathrm{Im}\,(\phi)$, nous écrivons $\lambda = \alpha(\mu) + \nu$ avec $\mu \in \mathrm{H}_2(S \setminus S_K)$ et $\nu \in \mathrm{Im}\,(\phi)$. Comme α et ϕ sont des morphismes de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-modules et que leurs images sont en somme directe, nous avons $H(\lambda) = H(\alpha(\mu)) \oplus H(\nu)$. Comme $\lambda \notin \mathrm{Im}\,(\phi)$, nous avons $\mu \neq 0$. D'après la proposition 2, la classe μ engendre une $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-représentation de dimension supérieure ou égale à $\mathrm{h}_1(S_K)^{\mathrm{ev}}$ (comme dans la preuve de l'assertion 4 de la section 2.2.2) ; comme α est injectif, nous avons dim $H(\alpha(\mu)) \geq \mathrm{h}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$, donc dim $H(\lambda) \geq \mathrm{h}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$.

Nous supposons $\lambda \notin \mathrm{Im}\,(\alpha) + \mathrm{Im}\,(\phi)$ et posons $\psi(\lambda) = \sum_{z \in C_K} \eta_z[z]$, avec $\eta_z \in \mathbb{C}$. Comme le triangle du diagramme du lemme 3 est commutatif, il existe des points $x \in C_K$ et $y \in C_K$ appartenant à la même composante irréductible $C' \subset C$ et tels que $\eta_x \neq \eta_y$. Comme $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ se surjecte sur le produit des groupes de permutations des points de C_K appartenant à une même composante irréductible de C (*cf.* [A-C-G-H], p. 111 pour le cas où C est irréductible ; le cas général se démontre de la même manière), il existe un élément $g \in \pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ dont l'action sur $\mathrm{H}_0(C_K)$ permute x et y et laisse fixe les autres points de C_K. Nous avons donc

$$\psi(g(\lambda) - \lambda) = g(\psi(\lambda)) - \psi(\lambda) = (\eta_y - \eta_x)([x] - [y]).$$

Posons $\lambda' = \frac{g(\lambda) - \lambda}{\eta_y - \eta_x}$: nous avons $g(\lambda') = [x] - [y]$. Comme $\lambda' \in H(\lambda)$, il suffit de montrer la proposition 3 pour λ'.

Comme l'action de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ sur $\mathrm{H}_2(S)$ est triviale, nous avons

$$v(\lambda') = v\left(\frac{g(\lambda) - \lambda}{\eta_y - \eta_x}\right) = \frac{g(v(\lambda)) - v(\lambda)}{\eta_y - \eta_x} = 0.$$

D'après la seconde ligne du diagramme du lemme 3, il existe donc une classe $\mu \in \mathrm{H}_1(S_K, C_K)$ telle que $u(\mu) = \lambda'$. Comme l'action de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ sur l'image de $\mathrm{H}_3(S)$ dans $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$

est triviale, son intersection avec l'image de $\mathrm{H}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$ dans $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$ est nulle ; la restriction de u à l'image de $\mathrm{H}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$ est donc injective. Il suffit donc de montrer que la $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-représentation engendrée par μ dans $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$ contient l'image de $\mathrm{H}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$.

Comme le rectangle de droite du diagramme du lemme 3 est commutatif, le bord de μ dans $\mathrm{H}_0(C_K)$ s'identifie à $\psi(u(\mu)) = [x] - [y]$: c'est un élément de $\mathrm{H}_0(C'_K) \subset \mathrm{H}_0(C_K)$, où nous avons posé $C'_K = C' \cap S_K$. La classe μ appartient donc au sous-espace $\mathrm{H}_1(S_K, C'_K)$ de $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$. La proposition 3 résulte donc du lemme suivant, appliqué à $C = C'$. $\square$

Lemme 4 *Supposons la courbe C irréductible. Soient x et y des points distincts de C_K et soit $\mu \in \mathrm{H}_1(S_K, C_K)$ une classe ayant pour bord $[x] - [y] \in \mathrm{H}_0(C_K)$. Alors la $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-représentation engendrée par μ contient l'image de $\mathrm{H}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$ dans $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$.*

Preuve. — Notons $\mathcal{P}$ l'hypersurface paramétrant les courbes S_L, $L \in \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}(d))$ singulières et $\mathcal{Q}$ l'hypersurface paramétrant les courbes S_L qui ne rencontrent pas C transversalement. Nous avons $\mathcal{V}_C = \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}(d)) \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$. La preuve du lemme 4 repose sur l'étude de la monodromie locale de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ sur $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)_{\mathrm{ev}}$ au voisinage d'un point (générique) de $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Plus précisément, soit $z_O \in C$ un point lisse. Comme $d \geq 2$, il existe un point $O \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ tel que

- z_O est un point double ordinaire de S_O et $S_O \setminus \{z_O\}$ est lisse ;
- z_O est un point de multiplicité 2 de C_O et $C_O \setminus \{z_O\}$ est lisse.

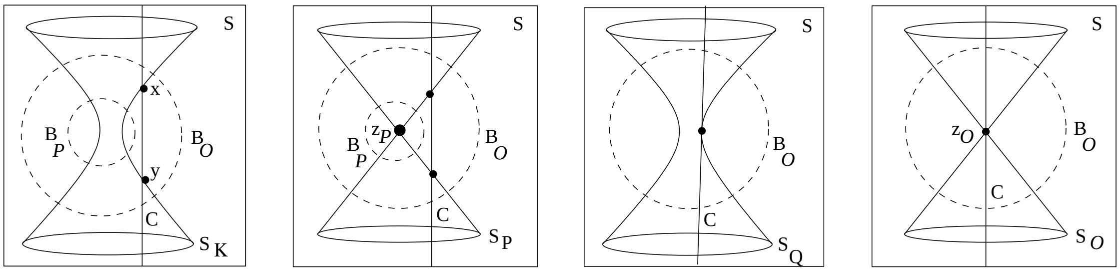
Nous utilisons les notations de la section 2.1.2. D'après la théorie de Morse, il existe un ouvert difféomorphe à une boule ouverte B_O de centre z_O dans S et une boule ouverte $\mathcal{D}_O$ de centre K_O dans $\mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}(d))$ tels que

1. l'hypersurface $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_O \subset \mathcal{D}_O$ est lisse et
   - pour tout $L \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}_O$ la variété $B_O^{S_L}$ est difféomorphe à la réunion de deux disques qui se coupent transversalement en l'unique point singulier z_L de S_L ; chaque disque contient un point de C_L distinct de z_L pour $L \neq O$;
   - pour tout $L \in \mathcal{D}_O \setminus (\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_O)$ la variété $B_O^{S_L}$ est difféomorphe à un cylindre ;
2. l'hypersurface $\mathcal{Q} \cap \mathcal{D}_O \subset \mathcal{D}_O$ est lisse, rencontre l'hypersurface $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_O$ uniquement en O et
   - pour tout $L \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{D}_O$ le schéma $B_O^{C_L}$ est un point double ;
   - pour tout $L \in \mathcal{D}_O \setminus (\mathcal{Q} \cap \mathcal{D}_O)$ le schéma $B_O^{C_L}$ est la réunion de deux points lisses ;
3. les variétés $\bigcup_{L \in \mathcal{D}_O} B_O^{S_L}$ et $\bigcup_{L \in \mathcal{D}_O} B_O^{C_L}$ sont lisses ;
4. les familles de variétés à bord $(\Gamma_O^{S_L}, \Sigma_O^{S_L})_{L \in \mathcal{D}_O}$ et $(\Gamma_O^{C_L}, \Sigma_O^{C_L})_{L \in \mathcal{D}_O}$ sont topologiquement triviales.

Le dessin 2 représente les quatre types de surfaces paramétrées par $\mathcal{D}_O$.

Comme $\mathcal{V}_C$ est connexe et que $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ se surjecte sur le groupe de permutations des points de C_K, il suffit de montrer le lemme 4 pour n'importe quel $K \in \mathcal{V}_C$ et n'importe quel couple de points dictincts de C_K : nous supposons $K \in D_O$ et $\{x, y\} = B_O^{C_K}$. Le lemme 4 résulte alors des sous-lemmes 1 et 2 ci-dessous. $\square$

Sous-lemme 1 *Le lemme 4 est vrai pour une classe $\nu \in \mathrm{H}_1(S_K, C_K)$ à support dans $B_O^{S_K}$ dont le bord est $[x] - [y]$.*



DESSIN 2 $K \in \mathcal{D}_O \setminus ((\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \cap \mathcal{D}_O)$, $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}_O$, $Q \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{D}_O$, $O = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{D}_O$

Preuve. — Fixons $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}_O \setminus \{O\}$. Comme le point singulier z_P de S_P n'appartient pas à C, il existe un ouvert difféomorphe à une boule ouverte $B_P \subset B_O$ de centre z_P qui ne rencontre pas C, tel que la variété $B_P^{S_P}$ est difféomorphe à la réunion de deux disques se coupant transversalement en z_P. D'après la théorie de Morse, il existe un disque $\mathcal{D}_P$ de centre P dans $\mathcal{D}_O \setminus (\mathcal{Q} \cap \mathcal{D}_O)$ qui ne rencontre $\mathcal{P}$ qu'en P, et tel que la variété $\bigcup_{L \in \mathcal{D}_P} B_P^{S_L}$ est lisse et la famille de variétés à bord $(\Gamma_P^{S_L}, \Sigma_P^{S_L})_{L \in \mathcal{D}_P}$ est topologiquement triviale (*cf.* dessin 4).

Sans perdre en généralité, nous supposons $K \in \mathcal{D}_P \setminus \{P\}$, en prenant pour x et y les deux points de $C_K \cap B_O$. Comme les familles $(B_O^{S_L} \setminus B_P^{S_L})_{L \in \mathcal{D}_P}$ et $(B_O^{C_L} \setminus B_P^{C_L})_{L \in \mathcal{D}_P}$ sont topologiquement triviales, l'espace $B_O^{S_K} \setminus B_P^{S_K}$ est homéomorphe à $B_O^{S_O} \setminus B_P^{S_O}$ qui s'identifie à la réunion disjointe de deux cylindres contenant chacun un point de C_O. Donc $B_O^{S_K} \setminus B_P^{S_K}$ est homéomorphe à la réunion disjointe de deux sous-cylindres du cylindre $B_O^{S_K}$ contenant l'un le point x et l'autre le point y et séparés par le sous-cylindre $B_P^{S_K}$ (*cf.* dessins 2 et 3). L'image ν^{B_P, Σ_P} de ν dans $\mathrm{H}_1(\overline{B}_P^{S_K}, \Sigma_P^{S_K})$ est alors la classe d'une génératrice du cylindre $B_P^{S_K}$.

Soit $\delta_P^{B_P} \in \mathrm{H}_1(B_P^{S_K})$ la classe d'un cercle sur le cylindre $B_P^{S_K}$ qui engendre son groupe fondamental, dont l'image dans $\mathrm{H}_1(S_K)$ est le cycle évanescent δ_P. Nous avons $\langle \nu^{B_P, \Sigma_P}, \delta_P^{B_P} \rangle = \varepsilon$, avec $\varepsilon = 1$ ou -1 selon l'orientation de $\delta_P^{B_P}$ (*cf.* dessin 3).

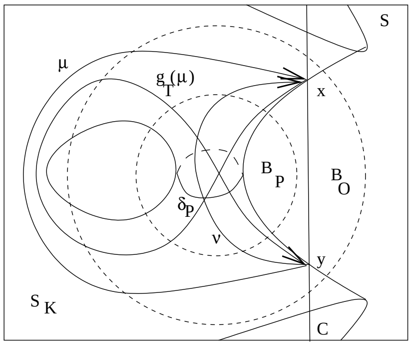
La formule de Picard-Lefschetz pour $\mathrm{H}_1(S_K)$ s'étend à $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$: pour tout $\lambda \in \mathrm{H}_1(S_K, C_K)$, si λ^{B_P, Σ_P} désigne l'image de λ dans $\mathrm{H}_1(\overline{B}_P^{S_K}, \Sigma_P^{S_K})$, si Δ_P désigne l'image de δ_P dans $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$, et si $g_S \in \pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ est la classe d'un lacet d'origine K faisant le tour de P dans $\mathcal{D}_P$, bien définie au signe près, nous avons

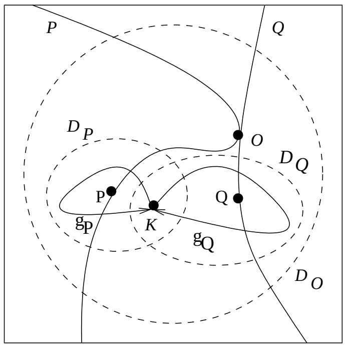
$$g_P(\lambda) - \lambda = \varepsilon \langle \lambda^{B_P, \Sigma_P}, \delta_P^{B_P} \rangle \Delta_P, \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 1 \text{ ou } -1.$$

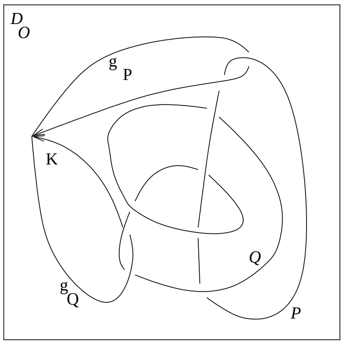
(*Preuve :* comme $\Gamma_P^{S_K}$ est connexe par arcs et contient C_K, le cycle λ est la somme d'un cycle dans l'image de $\mathrm{H}_1(\Gamma_P^{S_K}, C_K)$ et d'un cycle dans $\mathrm{rel}(\mathrm{H}_1(S_K))$. Le premier cycle est g_P-invariant et pour le second la formule ci-dessus résulte directement de la formule de Picard-Lefschetz usuelle.)

En particulier, nous avons $g_P(\nu) - \nu = \varepsilon \Delta_P$ avec $\varepsilon = 1$ ou -1. Mais Δ_P appartient à l'image de $\mathrm{H}_1(S_K)_{\mathrm{ev}} \setminus \{0\}$, et comme l'action de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ sur $\mathrm{H}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$ est irréductible, la $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$-représentation engendrée par ν contient l'image de $\mathrm{H}_1(S_K)_{\mathrm{ev}}$. □

Sous-lemme 2 *Pour tout $\mu \in \mathrm{H}_1(S_K, C_K)$, il existe une classe $\nu \in H(\mu)$ à support dans $B_O^{S_K}$ dont le bord est $[x] - [y]$.*







DESSIN 3 Monodromies DESSIN 4 $\mathcal{D}_O$ vu de haut DESSIN 5 $\mathcal{D}_O$ vu de O

Preuve. — Il existe un espace difféomorphe à un disque $\mathcal{D}_Q \subset \mathcal{D}_O \setminus (\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_O)$ qui contient K, rencontre $\mathcal{Q}$ en un unique point Q, et tel que la variété $\bigcup_{L \in \mathcal{D}_Q} B_O^{C_L}$ est lisse. Soit $g_Q \in \pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ la classe d'un lacet Γ_Q d'origine K faisant le tour de Q dans $\mathcal{D}_Q$, bien définie au signe près.

Nous étudions d'abord l'action de monodromie de g_Q sur $\mathrm{H}_0(C_K)$. Comme la variété $\bigcup_{L \in \mathcal{D}_Q} B_O^{C_L}$ est un revêtement double *lisse* de $\mathcal{D}_Q$, ramifié en Q, la variété $\bigcup_{L \in \Gamma_Q} B_O^{C_L}$ est un revêtement double *connexe* de Γ_Q. Nous avons donc $g_Q([x]-[y]) = [y]-[x]$ (nous pouvons aussi déduire cette égalité de la formule de Picard-Lefschetz appliquée à $[x]-[y]$, en remarquant que $[x]-[y]$ est le cycle évanescent).

Nous étudions ensuite l'action de g_Q sur $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$. Nous posons $\nu = \frac{\mu - g_Q(\mu)}{2}$ (*cf.* dessin 3). Alors

$$\mathrm{bord}(\nu) = \mathrm{bord}\left(\frac{\mu - g_Q(\mu)}{2}\right) = \frac{\mu - g_Q(\mathrm{bord}(\mu))}{2} = \frac{[x]-[y]-g_Q([x]-[y])}{2} = [x]-[y].$$

D'autre part, l'action de g_Q laisse invariante l'image de μ dans $\mathrm{H}_1(S_K, B_O^{S_K} \cup C_K)$; le cycle $\nu = \frac{\mu - g_Q(\mu)}{2}$ appartient donc à l'image de $\mathrm{H}_1(B_O^{S_K}, \{x,y\})$ dans $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$. Comme $\nu \in H(\mu)$, ceci achève la preuve du sous-lemme 2. □

Remarque sur le lemme 4. — Les hypersurfaces $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_O$ et $\mathcal{Q} \cap \mathcal{D}_O$ ne se coupent pas transversalement, un calcul direct montre en effet qu'elles sont tangentes. Ceci explique que les actions de g_P et g_Q ne commutent pas. Plus précisément, nous pouvons montrer que pour un choix convenable de g_P et g_Q, le groupe $\pi_1(\mathcal{D}_{\mathcal{O}}, K)$ est le groupe libre engendré par g_P et g_Q quotienté par la relation $(g_P g_Q)^2 = (g_Q g_P)^2$ (le dessin 5 représente alors l'intersection de $\mathcal{D}_O$ avec une petite sphère de centre O). Sa représentation de monodromie sur $\mathrm{H}_1(S_K, C_K)$ passe au quotient par la relation supplémentaire $g_Q^2 = 1$ et la représentantion quotient est fidèle. Ceci mène à une autre preuve du lemme 4, qui n'est pas plus simple.

Remarque sur la proposition 3. — La proposition 3 reste vraie dans la situation générale de la section 2.2.2. La preuve est identique à celle de la situation particulière (il faut remplacer le cycle $[x]-[y]$ par une sphère évanescente), sauf pour la surjectivité de $\pi_1(\mathcal{V}_C, K)$ sur le produit des groupes de permutations des points de C_K appartenant à une même composante irréductible de C qui doit être remplacée pour $N > 2$ par l'irréductibilité de l'action de monodromie de $\pi_1({}^A\mathcal{V}_Q^{d,d-e}, K)$ sur $\mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K,Q}/\mathrm{Im}\,(j_{A,K,Q}^{A,Q})^*)$, qui est fausse pour $N = 2$ et pénible à démontrer pour $N > 2$. Énoncer la proposition 3 pour la situation générale ne simplifie pas la preuve du théorème 2 ; nous avons donc choisi de l'énoncer pour la situation particulière qui privilégie l'intuition géométrique.

2.3 Monodromie locale d'une famille d'hypersurfaces au voisinage d'une dégénérescence en la réunion de deux hypersurfaces

Nous nous plaçons dans la situation générale de le section 2.2.2. Nous fixons $A \in \mathcal{V}^e$ et $Q \in \mathbb{P}\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(d))$ tels que $X_{A,Q}$ a au plus des singularités isolées si bien que $\mathcal{V}^{d-e}_{A,Q}$ est non vide.

2.3.1 La filtration dissymétrique

Comme pour tout $K \in \mathcal{V}^{d-e}_{A,Q}$ la sous-variété de $Y \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ définie par l'équation $AK + tQ = 0$, $t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est lisse pour $t \neq 0$, pour $t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ générique l'hypersurface X_{AK+tQ} est lisse. Soit ρ_K le plus petit réel (éventuellement infini) tel que si $\Delta \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert de rayon ρ_K et de centre 0, alors pour tout $t \in \Delta \setminus \{0\}$ l'hypersurface X_{AK+tQ} est lisse. Nous posons

$$\mathcal{U}_{A,Q} = \{K \in \mathcal{V}^{d-e}_{A,Q} \mid \rho_K > 1\}$$

si bien que pour tout $K \in \mathcal{U}_{A,Q}$ l'hypersurface X_{AK+Q} est lisse. L'application continue $\mathcal{U}_{A,Q} \to \mathcal{V}^d$, $K \mapsto AK+Q$ induit un morphisme de groupes $\pi_1(\mathcal{U}_{A,Q}, K) \to \pi_1(\mathcal{V}^d, AK+Q)$; le groupe $\pi_1(\mathcal{U}_{A,Q}, K)$ agit donc par monodromie sur $\mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$.

Proposition 4 *Pour tout $K \in \mathcal{U}_{A,Q}$ nous avons le diagramme suivant, dont la ligne et les colonnes sont des suites exactes de $\pi_1(\mathcal{U}_{A,Q}, K)$-modules.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{H}_N(X_A \setminus X_{A,K}) \arrow[d, "\alpha"] & & \mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{prim}} \arrow[d, "\mathrm{rel}"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_N(X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q})) \arrow[r, "F_2"] \arrow[d, "\psi"] & \mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \arrow[r, "F_4/F_2"] & \mathrm{H}_N(X_K, X_{A,K}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{bord}"] & 0 \\
 & \mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K,Q}) \arrow[d] & & \mathrm{H}_{N-1}(X_{A,K})_{\mathrm{ev}} \arrow[d] & \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Il existe donc une filtration $F_\bullet \mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$ de $\pi_1(\mathcal{U}_{A,Q}, K)$-modules vérifiant

1. $F_1 \mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) = \mathrm{H}_N(X_A \setminus X_{A,K})$ *;*
2. $F_2/F_1 \mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) = \mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K,Q})$ *;*
3. $F_3/F_2 \mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) = \mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{prim}}$ *;*

4. $F_4/F_3\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) = \mathrm{H}_{N-1}(X_{A,K})_{\mathrm{ev}}$ *;*
et $F_4\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) = \mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$.

De plus, les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{H}_N(X_{A,Q}) \arrow[dl, "(j^{A,Q}_{A,K,Q})^*"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "(j^{A,Q}_{AK+Q})_*"] & \\ \mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K,Q}) & \mathrm{H}_N(X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q})) \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "F_2"] & \mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \end{tikzcd} \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{N+2}(Y) \arrow[r, "j_K^*"] \arrow[d, "j^*_{AK+Q}"] & \mathrm{H}_N(X_K) \arrow[d, "\mathrm{rel}"] \\ \mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \arrow[r, "F_4/F_2"] & \mathrm{H}_N(X_K, X_{A,K}) \end{tikzcd} \tag{4}$$

Remarque. — Nous pouvons décomposer $\mathrm{H}_N(X_A \setminus X_{A,K})$ grâce à la suite exacte (2). Nous obtenons alors une filtration à 5 termes de $\mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$ dont les quotients successifs sont

$$\mathrm{H}_{N-1}(X_{A,K})^{\mathrm{ev}},\ \mathrm{H}_N(X_A)_{\mathrm{prim}},\ \mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K,Q}),\ \mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{prim}},\ \mathrm{H}_{N-1}(X_{A,K})_{\mathrm{ev}}.$$

La forme d'intersection induit un isomorphisme $\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \simeq \mathrm{H}_N(X_{AK+Q})^\vee$; la filtration duale de la filtration ci-dessus est obtenue en permutant A et K.

2.3.2 Preuve de la proposition 4 : étude d'une famille semistable

Nous fixons $K \in \mathcal{U}_{A,Q}$ et nous montrons l'existence, l'exactitude et la commutativité des diagrammes donnés par la proposition 4 ; la compatibilité avec l'action de $\pi_1(\mathcal{U}_{A,Q}, K)$ s'obtient en mettant notre construction en familles pour K parcourant $\mathcal{U}_{A,Q}$.

Soit $\mathcal{X} \subset Y \times \Delta$ la variété définie par l'équation $AK + tQ = 0$, $t \in \Delta$. Pour $N = 1$ la variété $\mathcal{X}$ est lisse. Pour $N \geq 2$ elle est singulière exactement en $X_{A,K,Q} \times \{0\}$ (et c'est une singularité ordinaire). Nous désingularisons la variété $\mathcal{X}$ en imitant (et en simplifiant) une construction de [G-H 2], section 2a, qui traite le cas $Y = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{X}}$ l'éclaté de $\mathcal{X}$ en l'idéal (K, Q). Remarquons que l'idéal (K, Q) est localement principal en dehors du lieu $X_{A,K,Q} \times \{0\}$; la projection $p : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ induit donc un isomorphisme $\widetilde{\mathcal{X}} \setminus p^{-1}(X_{A,K,Q} \times \{0\}) \to \mathcal{X} \setminus (X_{A,K,Q} \times \{0\})$. Nous pouvons décrire $\widetilde{\mathcal{X}}$ plus explicitement si nous munissons le fibré en droites projectives $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathcal{O}(d-e) \oplus \mathcal{O}(d))$ au-dessus de Y de coordonnées homogènes (U, V) : la variété $\widetilde{\mathcal{X}}$ est alors la sous-variété de $\mathbf{P} \times \Delta$ définie par les équations $KV + QU = 0$ et $AU - tV = 0$.

Nous notons $\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \to \Delta$ la projection naturelle et, pour tout $t \in \Delta$, $\widetilde{\mathcal{X}}_t$ la fibre en t de π. Les assertions suivantes sont alors des conséquences immédiates de la description de $\widetilde{\mathcal{X}}$ ci-dessus ; elles affirment que la famille $\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \to \Delta$ est semi-stable.

1. La variété $\widetilde{\mathcal{X}}$ est lisse.
2. Pour tout $t \in \Delta \setminus \{0\}$ la variété $\widetilde{\mathcal{X}}_t$ est canoniquement isomorphe à X_{AK+tQ}, en particulier elle est lisse.

3. La variété $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ est la réunion des variétés $\widetilde{X_A}$, définie comme l'éclaté de X_A le long de $X_{A,K,Q}$ (plongée dans $\mathbf{P} \times \Delta$ par les équations $t = 0$, $A = 0$, $KV + QU = 0$), et X_K (plongée dans $\mathbf{P} \times \Delta$ par les équations $t = 0$, $U = 0$, $K = 0$). Ces variétés sont lisses, se coupent transversalement et leur intersection est canoniquement isomorphe à $X_{A,K}$.

Nous notons $s : X_{A,K} \to \widetilde{X_A}$ l'immersion fermée définie par l'assertion 3.

La preuve de la proposition 4 repose sur les lemmes 5, 6, 7 et 8 ci-dessous.

Lemme 5 *Pour tout $t \in \Delta \setminus \{0\}$ nous avons une suite exacte longue*

$$\mathrm{H}_{i+1}(X_K, X_{A,K}) \to \mathrm{H}_i(\widetilde{X_A} \setminus s(X_{A,K})) \xrightarrow{\widetilde{F_2}} \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathcal{X}_t}) \xrightarrow{\widetilde{F_4/F_2}} \mathrm{H}_i(X_K, X_{A,K}) \to \mathrm{H}_{i-1}(\widetilde{X_A} \setminus s(X_{A,K})).$$

De plus, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{i+2}(\widetilde{Y}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_i(X_K) \arrow[d, "\mathrm{rel}"] \\ \mathrm{H}_i(\widetilde{X_t}) \arrow[r, "\widetilde{F_4/F_2}"] & \mathrm{H}_i(X_K, X_{A,K}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{H}_i(\widetilde{X_{A,Q}}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathcal{X}}_A \setminus s(X_{A,K})) \arrow[r, "\widetilde{F_2}"] \arrow[d] & \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathcal{X}}_t) \arrow[d] \\ & \mathrm{H}_i(\widetilde{X_A}) \arrow[r] & \mathrm{H}_i(\widetilde{X}) \end{tikzcd},$$

où $\widetilde{X_{A,Q}} \subset \widetilde{X_A}$ désigne le transformé strict de $X_{A,Q}$, où $\widetilde{Y} \subset \mathbf{P}$ désigne l'éclaté de Y en l'idéal (K, Q) et où les flèches non nommées sont induites par les immersions.

Preuve. — Comme les variétés $\widetilde{\mathcal{X}}_t$, $t \in \Delta \setminus \{0\}$ sont homéomorphes, il suffit de montrer le lemme 5 pour un seul $t \in \Delta \setminus \{0\}$.

En mettant en famille la construction de la section 2.1.2, nous obtenons un voisinage tubulaire ouvert $B_{A,K}$ de $s(X_{A,K}) \times \{0\}$, dans $\mathbf{P}$ et un petit voisinage Δ' de 0 dans Δ tels que

- la famille de variétés à bord $\left(\Gamma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_t}, \Sigma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_t}\right)_{t \in \Delta'}$ est topologiquement triviale ;
- la famille $\left(B_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_t}\right)_{t \in \Delta' \setminus \{0\}}$ est localement triviale (et ses fibres sont des fibrations en cylindres au-dessus de $X_{A,K}$) ;
- la variété $B_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_0}$ s'identifie à la réunion d'un voisinage tubulaire T_A de $s(X_{A,K})$ dans $\widetilde{X_A}$ et d'un voisinage tubulaire T_K de $X_{A,K}$ dans X_K qui se coupent le long de $X_{A,K}$; la variété $\Sigma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_0}$ s'identifie à la réunion des bords Σ_A et Σ_K des voisinages tubulaires T_A et T_K,

Pour tout $t \in \Delta'$ nous avons donc des homéomorphismes

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_t} &\simeq \Gamma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_0} \simeq (\widetilde{X_A} \setminus T_A) \cup (X_K \setminus T_K) \simeq (\widetilde{X_A} \setminus s(X_{A,K})) \cup (X_K \setminus X_{A,K}) \quad \text{et} \\ \Sigma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_t} &\simeq \Sigma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_0} \simeq \Sigma_A \cup \Sigma_K. \end{aligned}$$

Notons $\widetilde{\mathcal{X}}_{t,A}$ la composante de $\Gamma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_t}$ homéomorphe à $\widetilde{X_A} \setminus s(X_{A,K})$ et $\Sigma_A^{\widetilde{\mathcal{X}}_t}$ son bord ; de même, notons $\widetilde{\mathcal{X}}_{t,K}$ la composante de $\Gamma_{A,K}^{\widetilde{\mathcal{X}}_t}$ homéomorphe à $X_K \setminus X_{A,K}$ et $\Sigma_K^{\widetilde{\mathcal{X}}_t}$ son bord.

Nous avons alors pour tout $t \in \Delta'$

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathcal{X}}_{t,A}) &= \mathrm{H}_i(\widetilde{X_A} \setminus s(X_{A,K})) \qquad \text{et} \\ \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathcal{X}}_t, \widetilde{\mathcal{X}}_{t,A}) &= \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathcal{X}}_{t,K}, \Sigma_K^{\widetilde{\mathcal{X}}_t}) \qquad \text{par excision} \\ &= \mathrm{H}_i(\widetilde{\mathcal{X}}_{0,K}, \Sigma_K) \qquad \text{par transport plat} \\ &= \mathrm{H}_i(X_K, T_K) \qquad \text{par excision} \\ &= \mathrm{H}_i(X_K, X_{A,K}) \qquad \text{par retraction.} \end{aligned}$$

Grâce à ces isomorphismes, la suite exacte du lemme 5 s'identifie à la suite exacte longue d'homologie relative du couple $(\widetilde{\mathcal{X}}_t, \widetilde{\mathcal{X}}_{t,A})$. La commutativité des diagrammes est évidente. □

Lemme 6 *La projection $p_Y : \mathbf{P} \to Y$ induit une équivalence d'homotopies entre $\widetilde{X_A} \setminus s(X_{A,K})$ et $X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q})$, et donc un isomorphisme canonique $\mathrm{H}_i(\widetilde{X_A} \setminus s(X_{A,K})) \simeq \mathrm{H}_i(X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q}))$.*

Preuve. — Soit E_A le diviseur exceptionnel de $p_{Y|\widetilde{X_A}} : \widetilde{X_A} \to X_A$. Alors la projection $p_{Y|\widetilde{X_A}}$ définit par restriction

- un isomorphisme $\widetilde{X_A} \setminus (s(X_{A,K}) \cup E_A) \to X_A \setminus X_{A,K}$, restriction de l'isomorphisme $\widetilde{X_A} \setminus E_A \to X_A \setminus X_{A,K,Q}$;
- un fibré en droites affines $E_A \setminus (s(X_{A,K}) \cap E_A) \to X_{A,K,Q}$, inclus dans le fibré en droites projectives $E_A \to X_{A,K,Q}$.

Notons T un voisinage d'un voisinage tubulaire de $X_{A,K,Q}$ dans X_A et $\widetilde{T}$ l'image inverse de T par $p_{Y|\widetilde{X_A}} : \widetilde{X_A} \to X_A$. Alors $\widetilde{T}$ est un fibré sur $X_{A,K,Q}$ de fibre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \Delta$ (où Δ désigne un disque ouvert de centre 0). De plus

- $\widetilde{T} \cap \widetilde{X_A} \setminus s(X_{A,K})$ s'identifie à un fibré sur $X_{A,K,Q}$ de fibre $\mathbb{C} \times \Delta$;
- $T \cap X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q})$ s'identifie à un fibré sur $X_{A,K,Q}$ de fibre l'image de $\mathbb{C} \times \Delta$ par la contraction qui envoie $\mathbb{C} \times \{0\}$ sur un point.

Il existe une équivalence d'homotobie entre les deux fibrés ci-dessus induisant l'identité sur leur bord (qui s'identifie à un fibré sur $X_{A,K,Q}$ de fibre $\mathbb{C} \times S^1$). □

Lemme 7 *Le morphisme $\mathrm{H}_{N+1}(X_{AK+Q}) \to \mathrm{H}_{N+1}(X_K, X_{A,K})$ est surjectif.*

Preuve. — Grâce à la commutativité du diagramme (4), il suffit de montrer la surjectivité des morphismes $j_K^* : \mathrm{H}_{N+3}(Y) \to \mathrm{H}_{N+1}(X_K)$ et bord : $\mathrm{H}_{N+1}(X_K) \to \mathrm{H}_{N+1}(X_K, X_{A,K})$. La première résulte de ce que $\mathrm{H}_{N+1}(X_K)^{\mathrm{ev}} = 0$ et la seconde de ce que $\mathrm{H}_N(X_{A,K})_{\mathrm{ev}} = 0$. □

Lemme 8 *Le morphisme $\mathrm{H}_{N-1}(X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q})) \to \mathrm{H}_{N-1}(X_{AK+Q})$ est injectif.*

Preuve. — L'image par $(p_Y)_*$ du carré du second diagramme du lemme 5 donne le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{N-1}(X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q})) \arrow[r, "F_2"] \arrow[d, "v"] & \mathrm{H}_{N-1}(X_{AK+Q}) \arrow[d, "(j_{AK+Q})_*"] \\ \mathrm{H}_{N-1}(X_A) \arrow[r, "(j_A)_*"] & \mathrm{H}_{N-1}(Y) \end{tikzcd} ,$$

donc il suffit de montrer l'injectivité des morphismes $v : \mathrm{H}_{N-1}(X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q})) \to \mathrm{H}_{N-1}(X_A)$ et $(j_A)_* : \mathrm{H}_{N-1}(X_A) \to \mathrm{H}_{N-1}(Y)$. La première résulte du lemme 3, puisque $\mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K}, X_{A,K,Q}) = 0$, et la seconde de ce que $\mathrm{H}_{N-1}(X_A)_{\mathrm{ev}} = 0$. □

Fin de la preuve de la proposition 4. — La suite exacte qui constitue la ligne du diagramme de la proposition 4 se déduit de la suite exacte longue du lemme 5 et de l'isomorphisme du lemme 6. L'exactitude à gauche et à droite de la ligne du digramme résulte des lemmes 7 et 8. La suite exacte qui constitue la colonne de droite est la suite exacte (1). Si $N = 1$, nous avons $\mathrm{H}_N(X_A \setminus (X_{A,K} \setminus X_{A,K,Q}) \simeq \mathrm{H}_N(X_A \setminus (X_{A,K})$ et si $N \geq 2$ La suite exacte qui constitue la colonne de gauche est la première ligne du diagramme du lemme 3. Le triangle de gauche du diagramme (3) est le triangle du diagramme du lemme 3. La commutativité du triangle de droite du diagramme (3) et du diagramme (4) s'obtiennent en prenant l'image par $(p_Y)_*$ respectivement du triangle du second diagramme et du premier diagramme du lemme 5. □

2.3.3 Lien avec les travaux de Clemens, Schmid et Steenbrink sur les structures de Hodge limites

La preuve de la proposition 4 repose sur l'étude de la famille semi-stable $\widetilde{\mathcal{X}} \to \Delta_{Q,K}$. Or l'étude de familles semi-stables du point de vue de la monodromie autour de $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ est l'objet d'une abondante littérature (*cf.* [Cl] pour un langage et une situation similaires aux notres et [Sc] ou [St] pour le cas général). Notre point de vue diffère du point de vue classique en ce que nous introduisons au lemme 5 une dissymétrie entre les composantes de $\widetilde{\mathcal{X}}_0$. Cette section est une digression qui compare (sans donner de démonstration) nos résultats avec les constructions (essentiellement isomorphes) de [Cl], [Sc] et [St].

Schmid et Steenbrink définissent une structure de Hodge mixte sur la (co)homologie d'une fibre lisse d'une dégénerescence semi-stable, qui décrit le comportement asymptotique des structures de Hodge lorsque la fibre tend radialement vers la fibre singulière, les espaces de (co)homologie des fibres étant identifiées par transport plat. Dans le cas particulier de la famille $\widetilde{\mathcal{X}} \to \Delta_{Q,K}$, cette construction donne une filtration décroissante par le poids $W^\bullet$ sur $\mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$, qui vérifie

$$\begin{aligned}
W^{-N-1}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) &\simeq \mathrm{H}_N(X_{AK+Q});\\
W^{-N-1}/W^{-N}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) &\simeq \mathrm{H}_{N-1}(X_{A,K})_{\mathrm{ev}}(1);\\
W^{-N}/W^{-N+1}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) &\simeq \mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{prim}} \oplus \mathrm{H}_N(\widetilde{X_A})^{\mathrm{prim}};\\
W^{-N+1}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) &\simeq \mathrm{H}_{N-1}(X_{A,K})^{\mathrm{ev}}.
\end{aligned}$$

L'opérateur $T : \mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \to \mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$ de monodromie autour de $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ est unipotent et l'opérateur $N = \log T = T - \mathrm{Id}$ est la composée de la projection sur $W^{-N-1}/W^{-N}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$ avec un isomorphisme canonique

$$W^{-N-1}/W^{-N}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \simeq W^{-N+1}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q})(1).$$

La filtration $F_\bullet$ est une filtration de structures de Hodge mixtes au sens de Schmid et Steenbrink. Nous avons en particulier

$$W^{-N-1}/W^{-N}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \quad \simeq \quad F_4/F_3\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \quad \text{et}$$

$$W^{-N+1}\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}) \;\; \simeq \;\; \mathrm{H}_N(X_{A,K})^{\mathrm{ev}} \overset{\mathrm{tube}}{\hookrightarrow} F_1\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}).$$

Le gradué de la filtration par le poids est donc essentiellement équivalent au gadué associé à la filtration à 5 termes déduite de la filtration $F_\bullet$ en coupant $X_A \setminus X_{A,K}$ en deux morceaux. L'arbitre nous fait remarquer qu'il est possible de déduite la fitration $F_\bullet$ de la filtration par le poids ci-dessus. Malheureusement, nous ne savons pas en déduire la suite exacte courte qui constitue la ligne du milieu de la proposition 4 et qui est nécessaire pour initialiser la récurrence à la section 3.2.

2.3.4 La filtration quotient

Dans cette section nous supposons $A \in I_W^e$ et $Q \in I_W^d$ en plus des hypothèses de la section précédente.

Notons $H(W)_{A,K}$ le sous-espace de $\mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K,Q})$ engendré par les classes des composantes irréductibles de $W \cap X_K$ et par $(j_{A,K,Q}^{A,K})^*\mathrm{H}_N(X_{A,K})$. Les espaces $H(W) \subset \mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$ et $H(W)_{A,K} \subset \mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K,Q})$ sont $\pi_1(\mathcal{U}_{A,Q}, \mathbf{K})$-invariants.

Lemme 9 *Si* $\mathrm{h}_{N-1}(X_{A,K})_{\mathrm{ev}} \neq 0$ *alors la filtration* $F_\bullet\mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$ *de* $\pi_1(\mathcal{U}_{A,Q}, K)$*-modules donne par restriction à* $H(W)^\perp$ *la filtration suivante.*

1. $F_1H(W)^\perp \simeq \mathrm{H}_{N+1}(X_A \setminus X_{A,K})$,
2. $F_2/F_1H(W)^\perp \simeq H(W)^\perp_{A,K}$,
3. $F_3/F_2H(W)^\perp \simeq \mathrm{H}_{N+2}(X_K)^{\mathrm{ev}}$,
4. $F_4/F_3H(W)^\perp \simeq \mathrm{H}_{N+1}(X_{A,K})_{\mathrm{ev}}$,

et $F_4H(W)^\perp = H(W)^\perp$.

Grâce à la suite exacte (2) (pour l'assertion 1), nous obtenons immédiatement :

Corollaire *Nous avons*

1. $\dim F_1H(W)^\perp_j = \mathrm{h}_{N-2j+2}(X_{A,j})^{\mathrm{prim}} + \mathrm{h}_{N-2j+1}(X_{A,K,j})_{\mathrm{ev}}$;
2. $\dim F_2/F_1H(W)^\perp_j \leq \mathrm{h}_{N-2j}(X_{A,K,Q,j})_{\mathrm{ev}}$;
3. $\dim F_3/F_2H(W)^\perp_j = \mathrm{h}_{N-2j+2}(X_{K,j})_{\mathrm{ev}}$;
4. $\dim F_4/F_3H(W)^\perp_j = \mathrm{h}_{N-2j+1}(X_{A,K,j})_{\mathrm{ev}}$.

Preuve. — Nous étudions l'image de $H(W)$ par la filtration $F_\bullet$. Notons $[W] \subset \mathrm{H}_N(X_{A,Q})$ l'espace vectoriel engendré par les classes des composantes irréductibles de W et posons

$$H(W)' = (j_{A,Q}^{AK+Q})_*[W] + j_{AK+Q}^* \circ c_1(\mathcal{O}(1)) \frown \mathrm{H}_{N+4}(Y).$$

Comme le morphisme $j_{AK+Q}^* \circ c_1(\mathcal{O}(1)) \frown\colon \mathrm{H}_{N+4}(Y) \to \mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$ s'identifie à la multiplication par un scalaire près au morphisme $(j_{A,Q}^{AK+Q})_* \circ (j_{A,Q})^*$, nous avons $H(W)' \subset (j_{A,Q}^{AK+Q})_*\mathrm{H}_N(X_{A,Q})$. Comme le triangle de droite du diagramme (3) est commutatif, nous avons $(j_{A,Q}^{AK+Q})_* = F_2 \circ \phi$, donc $H(W)' \subset F_2\mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$, et, comme $\mathrm{h}_{N-1}(X_{A,K})_{\mathrm{ev}} \neq 0$, d'après le lemme 3 nous avons $\mathrm{Im}\,(\alpha) \cap \mathrm{Im}\,(\phi) = 0$, donc $H(W)' \cap F_1\mathrm{H}^N(X_{AK+Q}) = 0$. La projection de $H(W)'$ sur $\mathrm{H}_{N-2}(X_{A,K,Q})$ est donc injective. Comme le triangle de gauche du diagramme (3) est commutatif et que $j^*_{A,K,Q}\mathrm{H}_{N+4}(Y) = (j^{A,K}_{A,K,Q})^*\mathrm{H}_N(X_{A,K})$, nous avons

$$H(W)' \simeq H(W)_{A,K} \subset F_2/F_1\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}). \tag{5}$$

D'autre part, nous considérons l'espace

$$j^*_{AK+Q}\mathrm{H}_{N+2}(Y)^{\mathrm{prim}} = \mathrm{Coker}\,(j^*_{AK+Q} \circ c_1(\mathcal{O}(1)) \frown \mathrm{H}_{N+4}(Y) \to j^*_{AK+Q}\mathrm{H}_{N+2}(Y)),$$

où la flèche est l'inclusion. Le morphisme j^*_K définit par passage au quotient un isomorphisme $\mathrm{H}_{N+2}(Y)^{\mathrm{prim}} \simeq \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{prim}} \to \mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{ev}}\big)$. Les morphismes j^*_{AK+Q} : $\mathrm{H}_{N+2}(Y) \to \mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$ et rel : $\mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{prim}} \to \mathrm{H}_N(X_K, X_{AK})$ sont injectifs. Comme le diagramme (4) est commutatif, nous avons donc

$$j^*_{AK+Q}\mathrm{H}_{N+2}(Y)^{\mathrm{prim}} \simeq \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{prim}} \to \mathrm{H}_N(X_K)^{\mathrm{ev}}\big) \subset F_3/F_2\mathrm{H}_N(X_{AK+Q}). \tag{6}$$

Enfin, comme $(j^{AK+Q}_{A,Q})_*[W]$ est inclus dans $F_2\mathrm{H}^N(X_{AK+Q})$ et que $j^*_{AK+Q}\mathrm{H}_{N+2}(Y)^{\mathrm{prim}}$ s'injecte dans $F_3/F_2\mathrm{H}_N(X_{AK+Q})$, de la suite exacte

$$0 \to j^*_{AK+Q} \circ c_1(\mathcal{O}(1)) \frown \mathrm{H}_{N+4}(Y) \to j^*_{AK+Q}\mathrm{H}_{N+2}(Y) \to j^*_{AK+Q}\mathrm{H}_{N+2}(Y)^{\mathrm{prim}} \to 0$$

nous déduisons donc la suite exacte

$$0 \to H(W)' \to H(W) \to j^*_{AK+Q}\mathrm{H}_{N+2}(Y)^{\mathrm{prim}} \to 0,$$

et le lemme 9 résulte des assertions (5) et (6). □

3 Preuve du théorème 2

3.1 Preuve du théorème 2

Nous adoptons les notations de la section 0 et faisons les hypothèses du théorème 2 ; nous supposons de plus $\mathcal{V}^d(W)$ non vide.

Pour tout $F \in \mathcal{V}^d(W)$ nous identifions $\mathrm{H}_N(X_F)$ à $\mathrm{H}^N(X_F)$ par la dualité de Poincaré. Pour tout $\lambda \in H(W)^\perp$, nous notons $H(\lambda)$ la $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-représentation de monodromie engendrée par λ, $\mathrm{h}(\lambda)$ sa dimension et $\mathrm{h}(\lambda)^\perp$ sa codimension dans $H(W)^\perp$.

L'argument central de la preuve consiste à minorer $\mathrm{h}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in H(W)^\perp \setminus \{0\}$. C'est l'objet de la proposition suivante qui synthétise les résultats des deux premières parties et dont la preuve occupe la section 3.2.

Proposition 5 *Pour tout $F \in \mathcal{V}^d(W)$ et pour tout $\lambda \in H(W)^\perp \setminus \{0\}$ nous avons*

1.

$$\mathrm{h}(\lambda) \geq \min \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{h}_{N-2i+2}(Y(\underbrace{e,\ldots,e}_{i-1 \text{ fois}}, \underbrace{d-e,\ldots,d-e}_{i \text{ fois}})_{\mathrm{ev}} & \\ & i \in \left\{1, \ldots, \left[\dfrac{N+1}{2}\right]\right\} \\ \mathrm{h}_{N-2i+1}(Y(\underbrace{e,\ldots,e}_{i \text{ fois}}, \underbrace{d-e,\ldots,d-e}_{i \text{ fois}})_{\mathrm{ev}} & \end{array} \right),$$

où $Y(d_1, \ldots d_r)$ désigne une intersection complète lisse de multidegré $(d_1, \ldots d_r)$;

2. si $\mathrm{h}(\lambda) > A_{Y,e}$ *alors* $\mathrm{h}(\lambda)^\perp \leq A_{Y,e}$*, où nous avons posé*

$$A_{Y,e} = \mathrm{h}_N(Y(e))^{\mathrm{prim}} + 2\mathrm{h}_{N-1}(Y(e,d-e))_{\mathrm{ev}} + \mathrm{h}_{N-2}(Y(d,e,d-e))_{\mathrm{ev}}.$$

La proposition suivante donne une estimation de la dimension des espaces d'homologie intervenant dans la proposition 5. Sa preuve occupe la section 3.3.

Proposition 6 *Il existe une constante* $C \in \mathbb{R}_+^*$ *qui ne dépend que de* Y *et de* $\mathcal{O}(1)$*, telle que pour tout* $r \in \{1, \dots, N+1\}$*, pour tout* r*-uplet d'entiers strictement positifs et croissants* $(d_1, \dots, d_r)$ *tels que* $d_r \geq C$ *et pour toute intersection complète lisse* $X \subset Y$ *de multidegré* $(d_1, \dots, d_r)$ *nous avons*

$$\frac{1}{2} d_r^k \prod_{i=1}^{r} d_i \leq \mathrm{h}_k(X)_{\mathrm{ev}} \leq \mathrm{h}_k(X) \leq C d_r^k \prod_{i=1}^{r} d_i.$$

où nous avons posé $k = \dim X = N + 1 - r$*.*

Fin de la preuve du théorème 2. — Comme la $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-représentation de monodromie sur $H(W)^\perp$ préserve la forme d'intersection, elle est somme directe orthogonale de ses sous-représentations. Elle est donc irréductible si et seulement si pour tout λ et μ dans $H(W)^\perp \setminus \{0\}$ nous avons $H(\mu) \cap H(\lambda) \neq 0$.

Choisissons λ et μ dans $H(W)^\perp \setminus \{0\}$ et supposons $d \geq 2e$.

D'après l'assertion 1 de la proposition 5 (pour $e = \left[\frac{d}{2}\right]$), $\mathrm{h}(\lambda)$ est minoré par la dimension de l'homologie en dimension moitié d'une intersection complète lisse d'hypersurfaces de degrés $\left[\frac{d}{2}\right]$ et $d - \left[\frac{d}{2}\right]$; comme $d - \left[\frac{d}{2}\right] \geq \left[\frac{d}{2}\right]$, d'après la proposition 6, il existe une constante C_1 qui ne dépend que de Y et de $\mathcal{O}(1)$ telle que, si $d \geq C_1$, nous avons $\mathrm{h}(\lambda) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{d}{2}\right]^{N+1}$ et $\mathrm{h}(\mu) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{d}{2}\right]^{N+1}$.

D'autre part, d'après la proposition 6 pour les intersections complètes de multidegrés (e), $(e, d-e)$ et $(d, e, d-e)$, il existe une constante C_2 qui ne dépend que de Y et de $\mathcal{O}(1)$ telle que $A_{Y,e} \leq C_2 e d^N$. Nous avons donc $\frac{1}{2}\left[\frac{d}{2}\right]^{N+1} > C_2 e d^N \geq A_{Y,e}$ pour $d \geq 3^{N+2} C_2 e$.

Supposons $d \geq \max(C_1, 3^{N+2} C_2) e$: nous avons $\mathrm{h}(\lambda) > A_{Y,e}$, $\mathrm{h}(\mu) > A_{Y,e}$ et, d'après l'assertion 2 de la proposition 5, $\mathrm{h}(\mu)^\perp \leq A_{Y,e}$, donc $\mathrm{h}(\lambda) > \mathrm{h}(\mu)^\perp$ et $H(\mu) \cap H(\lambda) \neq 0$. $\square$

3.2 Preuve de la proposition 5

Comme $\mathcal{V}^d(W)$ est connexe, il est suffisant de montrer la proposition 5 pour un seul $F \in \mathcal{V}^d(W)$ et, au lieu de $\mathcal{V}^d(W)$, pour un sous-espace de $\mathcal{V}^d(W)$ contenant F. L'assertion 1 de la proposition 5 est donc impliquée par les lemmes 10 et 11 énoncés à la section 3.2.1. La preuve par récurrence du lemme 11 occupe les sections 3.2.2 et 3.2.3.

La preuve de la seconde assertion ne nécessite pas de récurrence ; elle occupe la section 3.2.4.

3.2.1 Preuve de l'assertion 1 : l'énoncé de la récurrence

Posons $r = \left[\frac{N+1}{2}\right]$.

Comme le schéma $W \subset Y$ vérifie l'assertion (a) de la proposition 1, les assertions (c) et (d) de la proposition 1 sont vraies : pour $(A_1, \dots, A_r, R) \in (I_W^e)^r \times I_W^d$ générique

1. $A_1, \dots, A_r$ et R sont en intersection complète ;
2. pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ le lieu singulier des schémas
$$X_{A_1} \cap \cdots \cap X_{A_j} \quad \text{et} \quad X_{A_1} \cap \cdots \cap X_{A_j} \cap X_R$$
est supporté par W et est de dimension inférieure ou égale à $j-2$ et $j-1$ respectivement (par convention, un lieu de dimension -1 est vide) ;
3. le schéma $(X_{A_1} \cap \cdots \cap X_{A_r} \cap X_R) \setminus W$ est lisse et connexe, sauf si $N = 1$.

Nous fixons $(A_1, \dots, A_r, R) \in (I_W^e)^r \times I_W^d$ comme ci-dessus.

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. Pour tout $(K_1, \dots, K_{j-1}) \in \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))^{j-1}$ posons
$$Y_j = \bigcap_{i=1}^{j-1} X_{A_i, K_i}, \quad \text{et} \quad W_j = W \cap \bigcap_{i=1}^{j-1} X_{K_i}.$$
Pour tout $i \in \mathbb{N}$ notons
$$\begin{array}{rcl} \psi_j^i : \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(i)) & \to & \mathrm{H}^0(Y_j, \mathcal{O}(i)) \quad \text{et} \\ {}^A\psi_j^i : \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(i)) & \to & \mathrm{H}^0(Y_j \cap X_{A_j}, \mathcal{O}(i)) \end{array}$$
les applications de restriction ; notons $\mathcal{V}_j^i \subset \mathrm{H}^0(Y_j, \mathcal{O}(i))$ et ${}^A\mathcal{V}_j^i \subset \mathrm{H}^0(Y_j \cap X_{A_j}, \mathcal{O}(i))$ les ouverts paramétrant (à la multiplication par un scalaire près) les hypersurfaces lisses de Y_j et de $Y_j \cap X_{A_j}$ de classe $c_1(\mathcal{O}(i))$. Pour tout $P \in \mathrm{H}^0(Y_j, \mathcal{O}(i))$ notons $X_{P,j} \subset Y_j$ l'hypersurface associée.

Pour tout $(K_j, \dots, K_r) \in \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))^{r-j+1}$ posons
$$\mathcal{W}_j^d = \left\{ F \in \mathcal{V}_j^d \;\middle|\; F = \psi_j^d \left(\sum_{i=j}^{r} A_i K_i + R \right), \ (K_j, \dots, K_r) \in \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))^{r-j+1} \right\}.$$
Remarquons que $\mathcal{W}_1^d \subset \mathcal{V}^d(W)$.

Nous dirons que $(K_1, \dots, K_{j-1})$ est *rouge* si les variétés Y_j et $Y_j \cap X_{A_j}$ sont lisses, de dimensions respectivement $N - 2j + 3$ et $N - 2j + 2$, et si l'espace $\mathcal{W}_j^d$ est non vide.

Lemme 10 *Il existe un $(K_1, \dots, K_{j-1}) \in \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))^{j-1}$ rouge.*

Preuve. — D'après le théorème de Bertini usuel et les conditions 1 et 2 sur les A_i et R, pour $(K_1, \dots, K_{j-1})$ générique les variétés Y_j, $Y_j \cap X_{A_j}$ et $Y_j \cap X_R$ sont lisses, de dimensions respectives $N-2j+3$, $N-2j+2$ et $N-2j+2$. En particulier, nous avons $\psi_j^d(R) \in \mathcal{W}_j^d$. Donc $(K_1, \dots, K_{j-1})$ générique est rouge. □

Pour tout $(K_1, \dots, K_{j-1})$ rouge et $F \in \mathcal{W}_j^d$ notons $H(W)_j \subset \mathrm{H}_{N-2j+2}(X_{F,j})$ le sous-espace engendré par les composantes irréductibles de W_j et par l'image de $\mathrm{H}_{N-2j+4}(Y_j)$. Le groupe $\pi_1(\mathcal{W}_j^d, F)$ agit alors par monodromie sur $\mathrm{H}_{N-2j+2}(X_{F,j})$.

Nous pouvons enfin donner l'énoncé de la récurrence :

Lemme 11 *Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, $(K_1, \dots, K_{j-1})$ rouge et $F \in \mathcal{W}_j^d$, les dimensions des $\pi_1(\mathcal{W}_j^d, F)$-représentations de monodromie engendrées par les éléments de $H(W)_j^\perp \setminus \{0\}$ vérifient la minoration de l'assertion 1.*

3.2.2 Le lemme 11 pour $j+1$ implique le lemme 11 pour j

Nous fixons $j \in \{1, \dots, r\}$ et $(K_1, \dots, K_{j-1})$ rouge.

Pour tout $(K_j, \dots, K_r) \in \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))^{r-j+1}$ posons

$$A = \psi_j^{-e}(A_j), \quad K = \psi_j^{d-e}(K_j), \quad Q = \psi_j^d\left(\sum_{i=j+1}^{r} A_i K_i + R\right) \quad \text{et} \quad F = AK + Q.$$

Nous dirons que $(K_j, \dots, K_r) \in \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))^{r-j+1}$ est *bleu* si les variétés

$$X_{A,j},\ X_{K,j},\ X_{F,j},\ X_{A,K,j} = Y_{j+1},\ X_{A,K,Q,j} = Y_{j+1} \cap X_{Q,j} \text{ et } Y_{j+1} \cap X_{A_{j+1}}$$

sont lisses, de codimensions attendues. Remarquons que les trois dernières conditions impliquent que $(K_1, \dots, K_{j-1}, K_j)$ est rouge.

Pour tout $(K_{j+1}, \dots, K_r) \in \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))^{r-j}$ notons $\mathcal{V}_{\text{bleu}}^{d-e} \subset \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))$ l'espace des K_j tels que $(K_j, K_{j+1}, \dots, K_r)$ est bleu. D'après le théorème de Bertini usuel, $(K_j.K_{j+1}, \dots, K_r)$ générique est bleu ; fixons $(K_{j+1}, \dots, K_r) \in \mathrm{H}^0(Y, (\mathcal{O}(d-e))^{r-j}$ tel que lequel l'espace $\mathcal{V}_{\text{bleu}}^{d-e}$ est non vide.

Pour tout $K_j \in \mathcal{V}_{\text{bleu}}^{d-e}$ les variétés indicées par j vérifient alors les conditions de la situation générale de la section 2.2.2. Nous pouvons donc raisonner comme dans la section 2.3.1 : la variété $X_{F,j}$ est lisse, donc pour $t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ générique la variété $X_{AK+tQ,j}$ est lisse. Soit ρ_K le plus petit réel (éventuellement infini) tel que si $\Delta \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert de rayon ρ_K et de centre 0, alors pour tout $t \in \Delta \setminus \{0\}$ et $j \in \{1, \dots, r\}$ la variété $X_{AK+tQ,j}$ est lisse. Posons

$$\mathcal{U} = \left\{ K_j \in \mathcal{V}_{\text{bleu}}^{d-e} \;\middle|\; \rho_K > 1 \right\}.$$

Le groupe $\pi_1(\mathcal{U}, K_j)$ agit par monodromie sur $\mathrm{H}_{N-2j+2}(X_{F,j})$ via l'application $\mathcal{U} \to \mathcal{W}_j$, $K_j \mapsto F_j$. Notons $\mathcal{V}_{A,Q,j}^{d-e}$, ${}^A\mathcal{V}_j^{d-e}$, ${}^A\mathcal{V}_{Q,j}^{d-e}$ et $\mathcal{U}_{A,Q,j}$ les analogues des espaces $\mathcal{V}_{A,Q}^{d-e}$, ${}^A\mathcal{V}^{d-e}$, ${}^A\mathcal{V}_Q^{d-e}$ et $\mathcal{U}_{A,Q}$ des sections 2.2.2 et 2.3.1 pour les variétés indicées par j. Nous avons $\psi_j^e(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_{A,Q,j}$, donc le groupe $\pi_1(\mathcal{U}, K_j)$ agit sur les espaces

- $\mathrm{H}_{N-2j+2}(X_{A,j} \setminus (X_{A,K,j} \setminus X_{A,K,Q,j}))$ via $\pi_1({}^A\mathcal{V}_{Q,j}^{d-e}, K)$,
- $\mathrm{H}_{N-2j+2}(X_{A,j} \setminus X_{A,K,j})$ via $\pi_1({}^A\mathcal{V}_j^{d-e}, K)$,
- $\mathrm{H}_{N-2j+2}(X_{K,j})^{\mathrm{ev}}$ via $\pi_1(\mathcal{V}_j^{d-e}, K)$ et
- $\mathrm{H}_{N-2j+1}(X_{A,K,j})_{\mathrm{ev}}$ via $\pi_1({}^A\mathcal{V}_j^{d-e}, K)$.

Lemme 12 *Les applications $\psi_j^e : \mathcal{U} \to \mathcal{V}_j^{d-e}$, ${}^A\psi_j^e : \mathcal{U} \to {}^A\mathcal{V}_{Q,j}^{d-e}$ et ${}^A\psi_j^e : \mathcal{U} \to {}^A\mathcal{V}_j^{d-e}$ induisent des morphismes de groupes fondamentaux surjectifs.*

Preuve. — Le lemme résulte des faits suivants :
- $\mathbb{C}^*\mathcal{U} = \mathcal{V}_{\text{bleu}}^{d-e}$, donc $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}_{\text{bleu}}^{d-e}$ sont homotopes ;
- les applications $\psi_j^e : \mathcal{V}_{\text{bleu}}^{d-e} \to \mathcal{V}_j^{d-e} \cap \operatorname{Im} \psi_j^e$ et ${}^A\psi_j^e : \mathcal{V}_{\text{bleu}}^{d-e} \to {}^A\mathcal{V}_{Q,j}^{d-e} \cap \operatorname{Im} {}^A\psi_j^e$ sont dominantes, à fibres connexes ;
- les inclusions $\mathcal{V}_j^{d-e} \cap \operatorname{Im} \psi_j^e \subset \mathcal{V}_j^{d-e}$ et ${}^A\mathcal{V}_{Q,j}^{d-e} \cap \operatorname{Im} \psi_j^e \subset {}^A\mathcal{V}_{Q,j}^{d-e}$ induisent des morphismes de groupes fondamentaux surjectifs par le théorème de Zariski : en effet, les applications ψ_j^e et ${}^A\psi_j^e$ ne sont en général pas surjectives, mais comme $\mathcal{O}(d-e)$ est très ample, les images de ψ_j^e et ${}^A\psi_j^e$ s'identifient à l'espace des sections hyperplanes

des variétés Y_j et $X_{A,j}$ pour le plongement projectif de Y défini par $\mathcal{O}(d-e)$; en particulier, les images de ψ_j^e et ${}^A\psi_j^e$ rencontrent transversalement les hypersurfaces discriminantes des espaces $\mathrm{H}^0(Y_j, \mathcal{O}(d-e))$ et $\mathrm{H}^0(X_{A,j}, \mathcal{O}(d-e))$, où les variétés $X_{K,j}$, $X_{A,K,j}$ et $X_{A,K,Q,j}$ sont singulières ;

– ${}^A\mathcal{V}_{Q,j}^{d-e} \subset {}^A\mathcal{V}_j^{d-e}$ est un ouvert de Zariski. □

Pour toute $\pi_1(\mathcal{W}_j^d, F)$- et $\pi_1(\mathcal{U}, K_j)$-représentation E notons $\mathrm{m}_j^{\mathcal{W}} E$ et $\mathrm{m}_j E$ respectivement la dimension minimale d'une sous-représentation non nulle (si $E = 0$ nous convenons que $\mathrm{m}_j E = \infty$). Nous avons

Lemme 13 *Si* $\mathrm{h}_{N-2j+1}(X_{A,K,j})_{\mathrm{ev}} \neq 0$ *et* $\mathrm{h}_{N-2j+2}(X_{K,j})_{\mathrm{ev}} \neq 0$ *alors*

1. $\mathrm{m}_j\, F_1 H(W)_j^\perp \geq \mathrm{h}_{N-2j+1}(X_{A,K,j})_{\mathrm{ev}}$;
2. $\mathrm{m}_j\, F_2/F_1 H(W)_j^\perp = \mathrm{m}_{j+1}^{\mathcal{W}}\, H(W)_{j+1}^\perp$;
3. $\mathrm{m}_j\, F_3/F_2 H(W)_j^\perp = \mathrm{h}_{N-2j+2}(X_{K,j})_{\mathrm{ev}}$;
4. $\mathrm{m}_j\, F_4/F_3 H(W)_j^\perp = \mathrm{h}_{N-2j+1}(X_{A,K,j})_{\mathrm{ev}}$.

Preuve. — D'après les lemmes 9 et 12,

1. résulte de la proposition 2 ;
2. résulte de ce que, comme $(K_j, \ldots, K_r)$ est bleu, $(K_1, \ldots, K_{j-1}, K_j)$ est rouge et $X_{A,K,Q,j} \subset Y_{j+1}$ est l'hypersurface définie par $\psi_{j+1}^d \left(\sum_{i=j+1}^r A_i K_i + R\right) \in \mathcal{W}_{j+1}^d$;
3. résulte de l'irréductibilité de l'action de $\pi_1(\mathcal{V}_j^{d-e}, K)$ sur $\mathrm{H}_{N-2j+2}(X_{K,j})^{\mathrm{ev}}$;
4. résulte de l'irréductibilité de l'action de $\pi_1(\mathcal{V}_j^{d-e}, K)$ sur $\mathrm{H}_{N-2j+1}(X_{A,K,j})^{\mathrm{ev}}$. □

Nous devons minorer $\mathrm{m}_j^{\mathcal{W}} H(W)_j^\perp$. Comme $\mathrm{m}_j^{\mathcal{W}} H(W)_j^\perp \geq \mathrm{m}_j H(W)_j^\perp$, le lemme 12 implique l'énoncé suivant, qui montre que le lemme 11 pour $j+1$ implique le lemme 11 pour j :

Corollaire *Pour tout* $j \in \{1, \ldots, r\}$,

$$\mathrm{m}_j^{\mathcal{W}}\, H(W)_j^\perp \geq \min\left(\mathrm{h}_{N-2j+1}(X_{A,K,j})^{\mathrm{ev}},\ \mathrm{h}_{N-2j+2}(X_{K,j})^{\mathrm{ev}},\ \mathrm{m}_{j+1}^{\mathcal{W}}\, H(W)_{j+1}^\perp\right).$$

3.2.3 Preuve du lemme 11 pour $j = r$

Cas $N = 2r - 1$. — Nous avons $H(W)_{r+1}^\perp = 0$ et le corollaire du lemme 13 implique l'assertion 1. □

Cas $N = 2r$. — Nous ne pouvons appliquer le corollaire du lemme 13 parce que $\mathrm{m}_{j+1}^{\mathcal{W}}\, H(W)_{r+1}^\perp = \mathrm{m}_j\, F^1/F^2 H(W)_r^\perp$ est trop petit. Le corollaire du lemme 13 implique seulement qu'il suffit de minorer $\mathrm{m}_j\, F^2 H(W)_r^\perp$.

Lemme 14 *L'espace* $H(W)_r \subset \mathrm{H}_2(X_{F,r})$ *contient les classes de toutes les composantes irréductibles de la courbe* $X_{A,Q,r}$.

Preuve. — Le schéma W_r est un sous-schéma de la courbe $X_{A,Q,r}$. Notons W'_r l'adhérence de $X_{A,Q,r} \setminus W_r$ dans $X_{A,Q,r}$: nous avons $X_{A,Q,r} = W_r \cup W'_r$. Par la condition 3 sur les A_i, le schéma $W'_r \setminus (W'_r \cap W_r)$ est connexe et lisse, donc le schéma W'_r est une courbe irréductible. D'une part les classes des composantes irréductibles de W_r appartiennent par définition à $H(W)_r$, d'autre part, comme $X_{A,Q,r} = X_{A,r} \cap X_{F,r}$, la classe de $X_{A,Q,r}$ est la restriction à $H_2(X_{F,r})$ de la classe de $X_{A,r}$ dans $H_4(Y_r)$, donc appartient aussi à $H(W)_r$. Ceci implique que la classe de W'_r appartient à $H(W)_r$. □

L'espace $F_2\mathrm{H}_2(X_{Q,r})$ s'identifie à $\mathrm{H}_2(X_{A,r} \setminus (X_{A,K,r} \setminus X_{A,K,Q,r}))$ par la proposition 4 pour les variétés indicées par r. Comme le triangle de droite du diagramme (3) est commutatif, le lemme 14 implique $\operatorname{Im}\phi \subset F_2H(W)_r$, donc soit $F_2H(W)_r^\perp = 0$ soit $F_2H(W)_r^\perp$ rencontre $\mathrm{H}_N(X_{A,r} \setminus (X_{A,K,r} \setminus X_{A,K,Q,r})) \setminus \operatorname{Im}\phi$. La proposition 3 et le lemme 12 impliquent alors $\mathrm{m}_j\, F^2H(W)_r^\perp \geq \mathrm{h}_1(X_{A,K,r})_{\mathrm{ev}}$ et le lemme 11 est vrai. □

3.2.4 Preuve de l'assertion 2

D'après le corollaire du lemme 9, nous avons

$$\begin{aligned} A_{Y,e} &\geq \dim F_1H(W)^\perp + \dim F_2/F_1H(W)^\perp + \dim F_4/F_3H(W)^\perp \\ &\geq \dim H(W)^\perp - \dim F_3/F_2H(W)^\perp. \end{aligned}$$

La condition $\mathrm{h}(\lambda) > A_{Y,e}$ implique donc $F_3/F_2H(\lambda) \neq 0$. Or d'après le lemme 13, $\mathrm{m}_1 F_3/F_2H(W)^\perp = \dim F_3/F_2H(W)^\perp$, donc $F_3/F_2H(\lambda) = F_3/F_2H(W)^\perp$, donc $\mathrm{h}(\lambda) \geq \dim F_3/F_2H(W)^\perp$ et $\mathrm{h}(\lambda)^\perp \leq \dim H(W)^\perp - \dim F_3/F_2H(W)^\perp \leq A_{Y,e}$. □

3.3 Preuve de la proposition 6 : les estimations asymptotiques

Soit $\chi(X) = \sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\mathrm{h}_i(X)$ la caractéristique d'Euler de X, soient T_X et T_Y les fibrés tangents respectifs de X et de Y, et soient $c\,(T_X)$ et $c\,(T_Y)$ leurs classes de Chern totales. Nous posons $\eta = c_1(\mathcal{O}(1))$ et $c\,(T_Y) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i(T_Y)$, et nous notons $Q_i(d_1,\ldots,d_r)$ le coefficient de degré $k-i$ en t de la série entière $\frac{1}{(1+d_1t)\ldots(1+d_rt)}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \int_X c\,(T_X) = \int_X \frac{c\,(T_Y)}{(1+d_1\eta)\ldots(1+d_r\eta)} = \prod_{i=1}^r d_i \int_Y \frac{\eta^r c\,(T_Y)}{(1+d_1\eta)\ldots(1+d_r\eta)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^r d_i\right) \sum_{i=0}^k Q_i(d_1,\ldots,d_r) \int_Y \eta^{N+1-i} c_i(T_Y). \end{aligned}$$

D'une part il existe une constante $C_r \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de r telle que pour tout $i \in \{0,\ldots,k\}$ nous avons $d_r^{k-i} \leq |Q_i(d_1,\ldots,d_r)| \leq C_r d_r^{k-i}$. D'autre part, il existe une constante $C_T \in \mathbb{R}_+^*$ qui dépend de Y et de $\mathcal{O}_Y(1)$ telle que pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$ nous avons $\int_Y \eta^{N+1-i}c_i(T_Y) \leq C_T$. Posons $C_\chi = \max\left((N+1)C_TC_r \mid r \in \{1,\ldots,N+1\}\right)$. Comme $\int_Y \eta^{N+1}c_0(T_Y) = \int_Y \eta^{N+1}$, nous avons $1 \leq \int_Y \eta^{N+1}c_0(T_Y)$. Nous en déduisons

$$\left(1 - \frac{C_\chi}{d_r}\right) d_r^k \prod_{i=1}^r d_i \leq |\chi(X)| \leq C_\chi d_r^k \prod_{i=1}^r d_i. \tag{7}$$

Or la théorie de Lefschetz donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_i(X) &= \mathrm{h}_i(Y) \qquad \text{pour } i \in \{0, \dots, k-1\} \ ; \\
\mathrm{h}_k(X) &= \mathrm{h}_k(X)_{\mathrm{ev}} + \mathrm{h}_k(Y) \ ; \\
\mathrm{h}_i(X) &= \mathrm{h}_{2k-i}(X) = \mathrm{h}_{2k-i}(Y) = \mathrm{h}_{2r+i}(Y) \qquad \text{pour } i \in \{k+1, \dots, 2k\}.
\end{aligned}$$

Posons $C_H = \sum_{i=0}^{2N+2} \mathrm{h}_i(Y)$. Nous avons donc

$$(-1)^k \chi(X) - C_H \leq \mathrm{h}_k(X)_{\mathrm{ev}} \leq \mathrm{h}_k(X) \leq (-1)^k \chi(X) + C_H.$$

La proposition 6 résulte de cette inégalité et de l'inégalité (7) pour $d_r \geq 2C_\chi + 2C_H$. $\square$

Références

[K-A] S. Kleiman, A. Altman *Bertini theorems for hypersurface sections containing a subscheme* Communications in Algebra, 7(8), p.775-790, (1979).

[A-C-G-H] E. Arbarello, M. Cornalba, Ph. Griffiths, J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves, Volume I.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 267, Springer-Verlag, (1985).

[Cl] H. Clemens. *Degeneration techniques in the study of threefolds.* Algebraic threefolds, Lecture Notes in Math. 947, p.93-154, (1981).

[F-L] W. Fulton, R. Lazarsfeld. *Connectivity and its applications in algebraic geometry.* Algebraic geometry, Lecture Notes in Math. 862, p.26–92, Chicago, Ill.(1980).

[L] K. Lamotke. *The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz.* Topology Vol 20, p.15-51, (1981).

[Lo] A. F. Lopez. *Noether-Lefschetz theory and the Picard group of projective surfaces.* Mem. Amer. Math. Soc. 89, (1991).

[G-H 2] Ph. Griffiths, J. Harris. *On the Noether-Lefschetz theorem and some remarks on codimension two cycles.* Math. Ann. 271, p.31-51 (1985).

[Sc] W. Schmid. *Variations of Hodge Structures : The Singularities of the Period Mapping.* Inventiones math. 22, p.211-319, (1973).

[St] A. Steenbrink. *Limits of Hodge Structures.* Inventiones math. 31, p.229-357, (1975-1976).

[V] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Cours donné à l'Université Paris VI ou VII, (1998-2000).

[W] A. Weil. *Variétés Khleriennes.* Hermann, Paris (1958).

Ania Otwinowska
Laboratoire de Mathématiques
Université Paris-Sud - Bât 425
91405 Orsay Cedex
France
e-mail : Ania.Otwinowska@math.u-psud.fr