Remarques sur les cycles de petite dimension de certaines intersections complètes

Anna Otwinowska

13 décembre 1999

Titre anglais. Remarks on small-dimensional cycles on complete intersections.

Resumé. On montre que la conjecture de Bloch-Beilinson pour les hypersurfaces implique la conjecture de Bloch-Beilinson pour certaines intersections complètes.

Abstract. We prove that the Bloch-Beilinson conjecture for hypersurfaces implies the Bloch-Beilinson conjecture for some complete intersections.

Abridged English Version.
The Bloch-Beilinson conjecture for complete intersections states:

Conjecture *Let $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ be a smooth complete intersection of multidegree $(d_1, \cdots, d_r)$. Then if $n - \sum_{i=1}^r d_i \geq k \cdot \max_{1 \leq i \leq r} d_i$, we have $\mathrm{CH}_k(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$, where $\mathrm{CH}_k(X)_{hom}$ is the subgroup of $\mathrm{CH}_k(X)$ of cycles homologically equivalent to 0.*

The above conjecture can be extended to singular complete intersections in the following way.

Stronger conjecture *Let $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ be a complete intersection of multidegree $(d_1, \cdots, d_r)$. Then if $n - \sum_{i=1}^r d_i \geq k \cdot \max_{1 \leq i \leq r} d_i$, we have $\mathrm{CH}_k(X - \mathrm{Sing\,X})_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$.*

Let $\mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_r)$ denote the stronger conjecture for complete intersections of multidegree $(d_1, \cdots, d_r)$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. We show:

Theorem *Let $d_1, \cdots, d_{r-1}, d$ be non-zero integers such that $d \geq d_i$ for all $i \in \{1 \cdots r-1\}$. We have:*

1. $\mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d) \Rightarrow \mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d, d)$

2. $\left.\begin{array}{l}\mathcal{H}_n(d_1,\cdots,d_{r-1},d-1)\\ \mathcal{H}_{n+1}(d_1,\cdots,d_{r-1},d)\end{array}\right\}\Rightarrow \mathcal{H}_n(d_1,\cdots,d_{r-1},d-1,d)$

3. *Let $(d_1,\cdots,d_r)$ be a multidegree such that for any $i\in\{1\cdots r\}$ any complete intersection $X\subset\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ of multidegree $(d_1,\cdots,d_{r-i})$ satisfies $\mathrm{CH}_{k+i}(X-\mathrm{Sing\,X})_{\mathrm{prim}}\otimes\mathbb{Q}=0$. Then any complete intersection $Y\subset\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ of multidegree $(d'_1,\cdots,d'_r)$, with $d'_i\leq d_i$ for any $i\in\{1\cdots r\}$, satisfies $\mathrm{CH}_k(Y-\mathrm{Sing\,Y})_{\mathrm{prim}}\otimes\mathbb{Q}=0$.*

The stronger conjecture is clearly true for quadrics, and proved for 2-, 3- and 4- cycles in cubics of respective dimensions 8, 11 and 14 [6]. Thus the theorem implies the following.

Corollary *The stronger conjecture is true for any complete intersection of quadrics, and for a complete intersection of cubics and quadrics in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ for $n\leq 15$.*

1 Introduction

On commence par rappeler un théorème classique, qui a été montré par Mumford [5] pour les 0-cycles sur les surfaces, Roitman [8] pour les 0-cycles, et enfin Paranjape [7] dans le cas général, en utilisant des méthodes de décomposition de la diagonale developpées par Bloch et Srinivas [2].

Théorème 1 *Soit X une variété projective lisse de dimension N. Si l'application classe $\mathrm{CH}_l(X)\otimes\mathbb{Q}\to\mathrm{H}^{2N-2l}(X,\mathbb{Q})$ est injective pour tout $l\leq k$, alors on a $\mathrm{H}^q(X,\Omega^p)=0$ pour $p\neq q$, $q\leq k$.*

La réciproque de ce théorème a été conjecturée par Bloch et Beilinson. Or dans le cas des intersections complètes on a

Théorème 2 *Soit $X\subset\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une intersection complète lisse de multidegré $(d_1,\cdots,d_r)$. Alors on a $\mathrm{H}^q(X,\Omega^p)=0$ pour $p\neq q$, $q\leq k$ si et seulement si $n-\sum_{i=1}^r d_i\geq k\cdot\max_{1\leq i\leq r} d_i$.*

(voir par exemple [3]). Ainsi la conjecture de Bloch-Beilinson devient :

Conjecture 1 *Soit $X\subset\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une intersection complète lisse de multidegré $(d_1,\cdots,d_r)$. Alors si $n-\sum_{i=1}^r d_i\geq k\cdot\max_{1\leq i\leq r} d_i$ on a $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{hom}}\otimes\mathbb{Q}=0$, où $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{hom}}$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{CH}_k(X)$ des cycles homologiquement équivalents à 0.*

On pose $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{prim}} := \mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_{k+r}(\mathbb{P}^n)\to\mathrm{CH}_k(X))$. Cette définition s'étend au cas où X est une variété quasi-projective quelconque. Dans le cas où X est une intersection complète lisse de dimension $n-r$, cette notion généralise à torsion près celle de $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{hom}}$ pour $k \leq (n-r)/2$. En effet, le théorème de Lefschetz montre que si X est une intersection complète lisse, l'application naturelle $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{hom}} \to \mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{prim}}$ est un isomorphisme à torsion près. On s'intéressera d'ailleurs dans la suite uniquement aux cycles à coefficients rationnels. Cela permet de formuler la conjecture plus générale suivante.

Conjecture 1 renforcée *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une intersection complète de multidegré $(d_1, \cdots, d_r)$. Alors si $n - \sum_{i=1}^r d_i \geq k \cdot \max_{1 \leq i \leq r} d_i$ on a $\mathrm{CH}_k(X - \mathrm{Sing}\ X)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$.*

D'après ce qui précède, cet énoncé est équivalent au premier lorsque X est lisse. Pour une intersection complète singulière X telle que $\dim(\mathrm{Sing}\, X) < k$, il entraîne que $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$ si $n - \sum_{i=1}^r d_i \geq k \cdot \max_{1 \leq i \leq r} d_i$. Il est probable que sous les mêmes hypothèses, on a en fait $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$. Nous avons cependant besoin de nous restreindre aux ouverts lisses parce que le procédé de Bloch et Srinivas auquel fait appel le lemme 1 ci-dessous n'est valable que dans le cas des morphismes dont la fibre générique est lisse.

On note $\mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_r)$ la conjecture 1 renforcée pour les intersections complètes de multidegré $(d_1, \cdots, d_r)$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Le but de cette note est de montrer :

Théorème 3 *Soient n, $d_1, \cdots, d_{r-1}, d$ des entiers non nuls tels que $d \geq d_i$ pour tout $i \in \{1 \cdots r-1\}$. On a :*

1. $\mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d) \Rightarrow \mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d, d)$
2. $\left.\begin{array}{l} \mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d-1) \\ \mathcal{H}_{n+1}(d_1, \cdots, d_{r-1}, d) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d-1, d).$
3. *On se donne un multidegré $(d_1, \cdots, d_r)$. On suppose que pour tout $i \in \{1 \cdots r\}$, toute intersection complète $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de multidegré $(d_1, \cdots, d_{r-i})$ vérifie $\mathrm{CH}_{k+i}(X - \mathrm{Sing}\ X)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$. Alors toute intersection complète $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de multidegré $(d'_1, \cdots, d'_r)$, avec $d'_i \leq d_i$ pour tout $i \in \{1 \cdots r\}$, vérifie $\mathrm{CH}_k(Y - \mathrm{Sing}\ Y)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$.*

La conjecture 1 renforcée étant triviale pour les quadriques, et démontrée pour les 2-, 3- et 4- cycles pour les cubiques de dimensions respectives ≥ 8, 11 et 14 (*cf.* [6]), on a en particulier le corollaire suivant.

Corollaire 1 *La conjecture 1 renforcée est vraie pour une intersection complète quelconque de quadriques, et pour une intersection complète de cubiques et de quadriques dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, avec $n \leq 15$.*

2 Preuve du théorème 3. 1.

Soit Y une intersection complète de multidegré $(d_1, \cdots, d_{r-1}, d, d)$ dans $\mathbb{P}^n$. Alors Y est l'intersection

- d'une intersection complète X de multidegré $(d_1, \cdots, d_{r-1})$
- de deux hypersurfaces X_1 et X_2 de degré d.

Soit $P \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ le pinceau engendré par X_1 et X_2 dans $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_X(d)))$. À un élément α de P correspond une hypersurface X_α de X qui est une intersection complète de multidegré $(d_1, \cdots, d_{r-1}, d)$ dans $\mathbb{P}^n$. On a alors $Y = \bigcap_{\alpha \in P} X_\alpha$. On pose

$$\mathcal{X} : = \{(x, \alpha) \in X \times P,\ x \in X_\alpha\}.$$

On note π la projection de $\mathcal{X}$ sur X, et p la projection de $\mathcal{X}$ sur P. On remarque que le morphisme π indentifie $\mathcal{X}$ à l'éclaté de X le long de Y. On pose $U_Y : = Y - \mathrm{Sing}\ Y$ et $U_X : = X - (\mathrm{Sing}\ X \cup \mathrm{Sing}\ Y)$. On a $U_Y = U_X \cap Y$; en particulier U_Y est un fermé dans U_X. On note $\mathcal{U}$ l'ouvert lisse de $\mathcal{X}$ obtenu comme éclaté de U_X le long de U_Y. On a donc $\mathcal{U} = \pi^{-1}(U_X)$. Par la description classique du groupe de Chow d'un éclaté on a

$$\mathrm{CH}_{k+1}(\mathcal{U}) \quad \simeq \quad \mathrm{CH}_{k+1}(U_X) \oplus \mathrm{CH}_k(U_Y) \tag{1}$$

où l'application $\mathrm{CH}_k(U_Y) \to \mathrm{CH}_{k+1}(\mathcal{U})$ est définie sur les sous-variétés fermées de U_Y par $Z \mapsto Z \times P$.

Lemme 1 *La fibre générique de $p : \mathcal{U} \to P$ est lisse, et si $n - (\sum_{i=1}^{r-1} d_i + d) \geq kd$, la propriété $\mathcal{H}_n(d_1, \ldots, d_{r-1}, d)$ étant supposée vraie, $\mathrm{CH}_{k+1}(\mathcal{U}) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par les cycles à support dans les fibres de p et par une puissance de la classe de la section hyperplane $H : = \pi^* c_1(\mathcal{O}_X(1))$.*

Démonstration — La lissité de la fibre générique résulte par le théorème de Bertini de ce que $\mathcal{U}$ et P sont lisses. On en déduit que pour $\alpha \in P$ générique l'application π identifie $U_\alpha := p^{-1}(\alpha)$ à un ouvert de Zariski de $X_\alpha - \mathrm{Sing}\ X_\alpha$. Par l'hypothèse $\mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d)$ cela implique $\mathrm{CH}_k(U_\alpha)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$. Soit $Z \in \mathrm{CH}_{k+1}(\mathcal{U})$. Comme pour tout $\alpha \in P$ le groupe $\mathrm{CH}_k(U_\alpha) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par la restriction de la classe H^{n-k-r} à U_α, il existe des entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que la restriction de $NZ - mH^{n-k-r}$ à U_α s'annule dans $\mathrm{CH}_k(U_\alpha)$ pour $\alpha \in P$ générique; par un argument classique dû à Bloch et Srinivas [2] cela implique qu'un multiple de $NZ - m\pi^* H^{n-k-r}$ est à support dans les fibres de p. $\square$

Preuve du théorème 3.1. — Soit

$$f : CH_{k+1}(\mathcal{U}) \to CH_k(U_Y)$$

l'application surjective donnée par la seconde projection dans la décomposition (1), et qui est aussi la composée de la restriction au diviseur exceptionnel $U_Y \times \mathbb{P}^1$ avec la projection $\pi_{Y*} : U_Y \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

Comme pour tout $\alpha \in P$ on a $Y \cap \text{Sing } X_\alpha \subset \text{Sing } Y$, les lieux Sing X_α, $\alpha \in P$ ne rencontrent pas U_Y. Ainsi les cycles à support dans $\cup_{\alpha \in P}\text{Sing } X_\alpha$ sont dans le noyau de f.

Supposons désormais $n - (\sum_{i=1}^{r-1} d_i + d) \geq (k+1)d$. D'après le lemme 1, le groupe $\mathrm{CH}_{k+1}(\mathcal{U}) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par H^{n-k-r} et par des cycles à support dans les fibres de p. Or, par l'hypothèse $\mathcal{H}(d_1, \cdots, d_{r-1}, d)$, pour tout $\alpha \in P$ on a $\mathrm{CH}_{k+1}(X_\alpha - \text{Sing } X_\alpha)_{\text{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$, donc le groupe $\mathrm{CH}_{k+1}(\mathcal{U}) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par H^{n-k-r} et par des cycles à support dans $\cup_{\alpha \in P}\text{Sing } X_\alpha$.

Ainsi, $\mathrm{CH}_k(U_Y) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par $f(H^{n-k-r})$, donc $\mathrm{CH}_k(U_Y)_{\text{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$, ce qui est exactement la propriété $\mathcal{H}_n(d_1, \ldots, d_{r-1}, d, d)$.

3 Preuve du théorème 3.2.

Soit Y une intersection complète de multidegré $(d_1, \cdots, d_{r-1}, d-1, d)$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Alors Y est intersection complète

- d'une intersection complète X de multidegré $(d_1, \cdots, d_{r-1})$;
- d'une hypersurface S de degré $d-1$ définie par un polynôme $F(X_0, \ldots, X_n)$;
- d'une hypersurface T de degré d définie par un polynôme $G(X_0, \ldots, X_n)$.

Soit $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ défini par $X_{n+1} = 0$ et soit

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}} - O & \to & \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \\ (X_0, \ldots, X_n, X_{n+1}) & \mapsto & (X_0, \ldots, X_n) \end{array}$$

la projection de centre $O \ := (0 \cdots 0, 1)$. On note $\widetilde{\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}}$ l'éclatement de $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ en O et $\tilde{\pi} : \widetilde{\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ la projection induite par π. Soit Z l'hypersurface de $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ définie par l'équation $X_{n+1}F + G = 0$. Le point $O \in Z$ est singulier à l'ordre $d-1$ et l'éclaté $\tilde{Z}$ de Z en O s'identifie au transformé strict de Z dans $\widetilde{\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}}$. Soit $\tau : \tilde{Z} \to Z$ l'application d'éclatement.

D'une part le diviseur exceptionnel $\tau^{-1}(O)$ est isomorphe à S.

D'autre part l'application

$$\tilde{\pi}_{|\tilde{Z}} : \tilde{Z} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

s'identifie à l'éclatement $\widetilde{\mathbb{P}^n_{S \cap T}}$ de $S \cap T$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

En restreignant à $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ la construction ci-dessus, on définit la variété $Z_X \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}} - O$ comme l'intersection de Z avec $\pi^{-1}(X)$ et la variété $\widetilde{Z_X}$ comme l'éclaté de Z_X en O. Comme X est en intersection complète avec T et S, les faits suivants découlent directement du cas $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$:

- le diviseur exceptionnel $\tau_X^{-1}(O)$ de $\tau_X : \widetilde{Z_X} \to Z_X$ est isomorphe à $X \cap S$;
- l'application $\pi_{|\widetilde{Z_X}} : \widetilde{Z_X} \to X$ s'identifie à l'éclatement de Y dans X.

Preuve du théorème 3.2. — On suppose désormais $n - (\sum_{i=1}^{r-1} d_i + d + d - 1) \geq (k-1)d$. On a donc aussi $n + 1 - (\sum_{i=1}^{r-1} d_i + d) \geq kd$ et $n - (\sum_{i=1}^{r-1} d_i + d - 1) \geq kd$ ce qui permet d'appliquer les propriétés $\mathcal{H}_{n+1}(d_1, \cdots, d_{r-1}, d)$ et $\mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d-1)$.

Comme $\tau_X^{-1}(O) = X \cap S$, on a la suite exacte :

$$\mathrm{CH}_k((X \cap S) - (\mathrm{Sing}\ (X \cap S) \cup \mathrm{Sing}\ \widetilde{Z_X})) \xrightarrow{j_*} \mathrm{CH}_k(\widetilde{Z_X} - (\mathrm{Sing}\ (X \cap S) \cup \mathrm{Sing}\ \widetilde{Z_X})) \to$$
$$\to \mathrm{CH}_k(Z_X - \mathrm{Sing}\ Z_X) \to 0.$$

D'après l'hypothèse $\mathcal{H}_{n+1}(d_1, \cdots, d_{r-1}, d)$ on a $\mathrm{CH}_k(Z_X - \mathrm{Sing}\ Z_X)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$ et d'après l'hypothèse $\mathcal{H}_n(d_1, \cdots, d_{r-1}, d-1)$ on a $\mathrm{CH}_k((X \cap S) - \mathrm{Sing}\ (X \cap S))_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$. Ainsi $\mathrm{CH}_k(\widetilde{Z_X}) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par $\tau^* H^{n+1-r-k}$, par $j_* H^{n-r-k}$ et par des cycles à support dans $\mathrm{Sing}\ (X \cap S) \cup \mathrm{Sing}\ \widetilde{Z_X}$.

D'autre part, la variété $\widetilde{Z_X}$ est l'éclatement de X le long de Y. On pose $U_Y := Y - \mathrm{Sing}\ Y$ et $U_X := X - (\mathrm{Sing}\ X \cup \mathrm{Sing}\ Y)$. Comme $U_Y = U_X \cap Y$, la variété U_Y est un fermé dans U_X. L'ouvert $\mathcal{U} := \widetilde{Z_X} - \tilde{\pi}^{-1}_{|\widetilde{Z_X}}(\mathrm{Sing}\ X) - \tilde{\pi}^{-1}_{|\widetilde{Z_X}}(\mathrm{Sing}\ Y)$ de $\widetilde{Z_X}$ est donc l'éclatement de U_X le long de U_Y. Par la description classique du groupe de Chow d'un éclaté on a

$$\mathrm{CH}_k(\mathcal{U}) = \mathrm{CH}_k(U_X) \oplus \mathrm{CH}_{k-1}(U_Y).$$

La variété $\mathcal{U}$ est lisse, donc ne rencontre pas $\mathrm{Sing}\ \widetilde{Z_X}$. Ainsi, $\mathrm{CH}_k(\mathcal{U}) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par $\tau^* H^{n+1-r-k}$, par $j_* H^{n-r-k}$ et par des cycles à support dans $j(\mathrm{Sing}\ (X \cap S)) \cap \mathcal{U}$. On en déduit que $\mathrm{CH}_{k-1}(U_Y) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par les images de $\tau^* H^{n+1-r-k}$ et de $j_* H^{n-r-k}$, et par des cycles à support dans $(\tilde{\pi}_{|\widetilde{Z_X}} \circ j)(\mathrm{Sing}\ (X \cap S)) \cap U_Y = \mathrm{Sing}\ (X \cap S) \cap U_Y$. Comme $Y \cap \mathrm{Sing}\ (X \cap S) \subset \mathrm{Sing}\ Y$, cette dernière variété est vide; donc $\mathrm{CH}_{k-1}(U_Y) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par les seules images de $\tau^* H^{n+1-r-k}$ et de $j_* H^{n-r-k}$, qui s'annulent dans $\mathrm{CH}_{k-1}(U_Y)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q}$. Ainsi $\mathrm{CH}_{k-1}(U_Y)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

4 Preuve du théorème 3.3.

On raisonne par récurrence sur r. Pour $r=0$ l'énoncé est vide. On suppose le résultat vrai pour $r-1$. Il suffit alors de montrer l'énoncé pour une intersection complète $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de multidegré $(d_1, \cdots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \cdots, d_r)$.

Soit $H \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une section hyperplane. Soit L l'intersection complète de multidegré $(d_1, \cdots, d_{i-1}, 1, d_{i+1}, \cdots, d_r)$ obtenue à partir de Y en remplaçant la i-ème équation par la forme linéaire définissant H. On a $Y \cap H = Y \cap L$. D'autre part $Y \cup L$ a une structure naturelle d'intersection complète de multidegré $(d_1, \cdots, d_r)$ et vérifie donc $\mathrm{CH}_k((Y \cup L) - \mathrm{Sing}(Y \cup L))_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$. Comme $Y \cap L \subset Y \cup L$ est singulier, $Y - ((Y \cap H) \cup \mathrm{Sing}\, Y)$ est une composante connexe de $(Y \cup L) - \mathrm{Sing}(Y \cup L)$, donc $\mathrm{CH}_k(Y - ((Y \cap H) \cup \mathrm{Sing}\, Y))_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$. Par la suite exacte de localisation, cela équivaut à la surjectivité du morphisme

$$\mathrm{CH}_k((Y - \mathrm{Sing\ Y}) \cap \mathrm{H})_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{CH_k(Y - Sing\ Y)_{prim}} \otimes \mathbb{Q}.$$

Donc tout k-cycle de Y est supporté sur une section hyperplane générique de Y.

Or on a le lemme suivant.

Lemme 2 *Soit $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une sous-variété quasi-projective lisse. Soit $Z \in \mathrm{CH}_k(Y) \otimes \mathbb{Q}$ tel que pour un hyperplan générique $H \in \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}}$, le cycle Z est rationnellement équivalent dans Y à un cycle Z_H à coefficients rationnels à support dans $Y \cap H$. Alors il existe $W \in \mathrm{CH}_{k+1}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ tel que $Z = [H] \cdot W$, où $[H] = c_1(\mathcal{O}_Y(1))$ est la classe de la restriction de H à Y.*

Démonstration — On pose

$$\mathcal{Y} := \{(y, H) \in Y \times \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}},\ y \in Y \cap H\} \overset{j}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}}.$$

Par hypothèse, il existe un morphisme propre génériquement fini $\phi : M \to \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}}$ de degré n_ϕ et un cycle $W_\phi \in CH_{n+k}(Y \times M) \otimes \mathbb{Q}$ tels que pour $m \in M$ générique la restriction $W_{\phi,m}$ de W_ϕ à $Y \times m$ est à support dans $Y \cap \phi(m)$ et est rationnellement équivalente à Z. Le cycle $\frac{1}{n_\phi}(\mathrm{Id} \times \phi)_* W_\phi$ est à support dans $\mathcal{Y}$; soit $W_0 \in CH_{n+k}(\mathcal{Y}) \otimes \mathbb{Q}$ un cycle vérifiant $j_* W_0 = \frac{1}{n_\phi}(\mathrm{Id} \times \phi)_* W_\phi$. Pour $H \in \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}}$ générique, le cycle Z est rationnellement équivalent à $j_* W_0 \cap (Y \times \{H\})$.

La restriction

$$j^* : CH_{k+n+1}(Y \times \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}}) \to CH_{k+n}(\mathcal{Y})$$

est surjective car $\mathcal{Y}$ et $Y \times \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}}$ sont des fibrés projectifs sur Y. Il existe donc $W_1 \in CH_{k+n+1}(Y \times \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{Q}$ tel que $W_0 = j^* W_1$. Or la variété $\mathcal{Y}$ définit un diviseur de classe $h + g$ dans $Y \times \mathbb{P}^{n\vee}_{\mathbb{C}}$, où $g = p_2^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, si bien que $j_* W_0 = (h+g) W_1$. Comme g est nul sur $Y \times \{H\}$, en restreignant cette égalité à $Y \times \{H\}$, on trouve $Z = h \cdot W$, avec $W = W_1 \cap (Y \times \{H\})$. $\square$

Soit $Z \in \mathrm{CH}_{k+1}(Y - \mathrm{Sing}\, Y)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q}$, et soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ l'intersection complète de multidegré $(d_1, \cdots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \cdots, d_{r-1})$ obtenue en enlevant la dernière équation de degré d_r définissant Y. On a $Y \cap \mathrm{Sing}\, X \subset \mathrm{Sing}\, Y$. Soit $i : Y - \mathrm{Sing}\, Y \hookrightarrow X - (\mathrm{Sing}\, X \cup \mathrm{Sing}\, Y)$ l'immersion fermée. D'après [4], Chap 6, cor 6.3, p. 102, on a:

$$d_r(Z \cdot H) = Z \cdot c_1(\mathcal{N}(X, Y)) = i^* i_*(Z).$$

Or par hypothèse de récurrence on a $\mathrm{CH}_{k+1}(X - \mathrm{Sing}\, X)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$, et, comme $i^* i_*(Z)$ se factorise à travers $\mathrm{CH}_{k+1}(X - \mathrm{Sing}\ X)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q}$, on a $Z \cdot H = 0$. Par le lemme 2 appliqué à $Y - \mathrm{Sing}\ Y$ et à W, cela implique $\mathrm{CH}_k(Y - \mathrm{Sing}\ Y)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Q} = 0$.

Remerciements. Je remercie Claire Voisin pour avoir patiemment relu et corrigé les versions préliminaires de cette note.

Références

[1] A.Beauville et R.Donagi. *Sur les groupes de Chow de certaines hypersurfaces.* C.R.Acad.Sc.Paris, t.301, Série 1,n°14, p 73-76, (1985).

[2] S.Bloch, V.Srinivas. *Remarks on correspondences and algebraic cycles.* Amer. J. of Math. 105, p 1235-1253, (1980).

[3] H.Esnault, M.Levine, E.Viehweg. *Chow groups of projective varieties of very small degree.* Duke Math. J. 87 n°1, p 29-58, (1992)

[4] W.Fulton. *Intersection Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer (1984)

[5] D.Mumford. *Rational equivalence of zero-cycles on surfaces.* Journal of mathematics of Kyoto University 9 (1969).

[6] A.Otwinowska. *Remarques sur les groupes de Chow des hypersurfaces de petit degré.* Note soumise aux C.R.Acad.Sc.Paris

[7] K.Paranjape. *Cohomological and cycle-theoretic connectivity.* Annals of Math. 139, série 2, p 641-660 (1994).

[8] A.A.Roitman. *Rational equivalence of zero-cycles.* Math. USSR Sbornik 18, p.571-588,(1971).

Universite Paris VI, 2-4 pl. Jussieu, 75005 Paris.