Présentation de deuxième année
Un isomorphisme de Cartan pour l'homologie de Floer equivariante

Julio Sampietro Christ

16 mai 2024

Le but

L'objectif est de comprendre l'isomorphisme de Cartan dans le contexte de l'homologie de Floer, c'est-à-dire une formule de sorte

$$FH_*^G(L_0, L_1) \cong FH_*(\overline{L_0}, \overline{L_1}).$$

Le but

L'objectif est de comprendre l'isomorphisme de Cartan dans le contexte de l'homologie de Floer, c'est-à-dire une formule de sorte

$$FH_*^G(L_0, L_1) \cong FH_*(\overline{L_0}, \overline{L_1}).$$

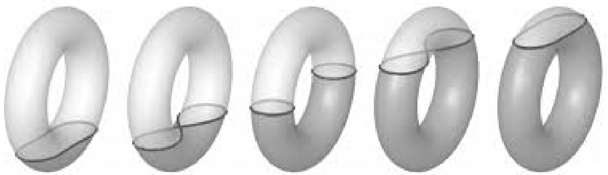
- C'est quoi FH ?
- Et avec l'indice G ?
- C'est quoi les barres sur les L ?

L'homologie de Morse, c'est quoi ?

- Soit M une variété fermée. Une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ est dite *Morse* si le Hessien est non-dégéneré à chaque point critique.
- *Lemme de Morse* : Les fonctions de Morse sont abondantes (génériques) dans l'espace des fonctions lisses.

L'homologie de Morse, c'est quoi ?

- Soit M une variété fermée. Une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ est dite *Morse* si le Hessien est non-dégéneré à chaque point critique.
- *Lemme de Morse* : Les fonctions de Morse sont abondantes (génériques) dans l'espace des fonctions lisses.
- Étant donnés une métrique Riemannienne g sur M, f donne lieu à un flot, qu'on note φ_g^t, donné par les solutions de l'équation
$$\dot{x} = -\nabla_g f(x).$$
- L'idée de la théorie de Morse est d'étudier la topologie de M en étudiant les sous-niveaux de f, 'en la remplissant d'eau'.



- Si p, q sont des points critiques de f, on dénote par $\mathcal{M}(p, q)$ l'ensemble des trajectoires qui partent de p et terminent en q.
- Pour g générique, tous les $\mathcal{M}(p, q)$ sont des variétés lisses de dimension $\mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q) - 1$.

- Si p, q sont des points critiques de f, on dénote par $\mathcal{M}(p,q)$ l'ensemble des trajectoires qui partent de p et terminent en q.
- Pour g générique, tous les $\mathcal{M}(p,q)$ sont des variétés lisses de dimension $\operatorname{ind}(p) - \operatorname{ind}(q) - 1$.
- Soit $C_*(M)$ le $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel libre engendré par les points critiques de f, et ∂ l'application linéaire donnée par

$$\partial p = \sum_{\operatorname{ind}(q)=\operatorname{ind}(p)-1} \#_2 \mathcal{M}(p,q) \cdot q.$$

- Alors $\partial \circ \partial = 0$ et l'homologie résultante, *l'homologie de Morse*, est indépendante de f et g et isomorphe à l'homologie singulière de M.

$$MH_*(M) \cong H_*(M; \mathbb{Z}_2).$$

Et l'homologie équivariante ?

- On fixe G un groupe de Lie compact et on suppose que M est munie d'une action lisse à gauche. Le quotient M/G n'est pas toujours une variété lisse, et son homologie 'ne voit pas' l'action de G. On désire alors une homologie plus fine.

Et l'homologie équivariante ?

- On fixe G un groupe de Lie compact et on suppose que M est munie d'une action lisse à gauche. Le quotient M/G n'est pas toujours une variété lisse, et son homologie 'ne voit pas' l'action de G. On désire alors une homologie plus fine.
- Tout groupe de Lie compact G admet un *espace universel* EG qui se caractérise, à équivalence homotopique près, par être l'unique espace contractile avec une action libre de G (cf. les variétés de Stiefel). Son quotient $BG := EG/G$ est appelé l'espace classifiant de G.

Et l'homologie équivariante ?

- On fixe G un groupe de Lie compact et on suppose que M est munie d'une action lisse à gauche. Le quotient M/G n'est pas toujours une variété lisse, et son homologie 'ne voit pas' l'action de G. On désire alors une homologie plus fine.
- Tout groupe de Lie compact G admet un *espace universel* EG qui se caractérise, à équivalence homotopique près, par être l'unique espace contractile avec une action libre de G (cf. les variétés de Stiefel). Son quotient $BG := EG/G$ est appelé l'espace classifiant de G.
- On définit *l'homologie équivariante* de M comme

$$H_*^G(M) := H_*(M \times_G EG)$$

où $M \times_G EG := M \times EG/G_{\mathrm{diag}}$. On peut aussi définir la *cohomologie équivariante* de M, $H_G^*(M)$ de manière analogue.

L'isomorphisme de Cartan classique

Si l'action de G sur M est libre, alors l'application quotient

$$\pi : M \times_G EG \to M/G$$

est une fibration localement triviale de fibre EG. Or, EG est contractile ! Donc il s'agit d'une équivalence homotopique et on conclut :

$$\pi_* : H_*^G(M) \cong H_*(M/G).$$

L'isomorphisme de Cartan classique

Si l'action de G sur M est libre, alors l'application quotient

$$\pi : M \times_G EG \to M/G$$

est une fibration localement triviale de fibre EG. Or, EG est contractile ! Donc il s'agit d'une équivalence homotopique et on conclut :

$$\pi_* : H_*^G(M) \cong H_*(M/G).$$

Slogan : Si l'action est libre, on récupère l'homologie usuelle. C'est l'isomorphisme de Cartan classique.

Variétés symplectiques

- Soit (X, ω) une variété symplectique. Une sous-variété $L \subset X$ est dite Lagrangienne si $\omega|_L = 0$ et $\dim L = \frac{1}{2} \dim X$.
- Si $H : X \to \mathbb{R}$ est lisse, elle engendre un champ vectoriel par la formule
$$\omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot).$$
C'est un champ vectoriel *Hamiltonien* et l'isotopie obtenue en l'intégrant est appelée isotopie Hamiltonienne.
- Toute variété symplectique admet une *structure presque complexe* $J \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ compatible avec ω, c'est-à-dire :
  - $J^2 = -\mathrm{Id}$
  - $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$
  - $\omega(\xi, J\xi) > 0$ pour tout $\xi \neq 0$.

Actions Hamiltoniennes

Si X est symplectique, une action à gauche de G sur X est dite *Hamiltonienne* s'il existe une application lisse $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ (le dual de $\mathfrak{g} = T_e G$) telle que :

- Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, on a

  $$\omega(X_\xi, \cdot) = d\langle \mu, \xi \rangle(\cdot)$$

  où $X_\xi(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot p$.
- μ est G-équivariante par rapport à l'action coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.

Actions Hamiltoniennes

Si X est symplectique, une action à gauche de G sur X est dite *Hamiltonienne* s'il existe une application lisse $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ (le dual de $\mathfrak{g} = T_e G$) telle que :

- Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, on a
$$\omega(X_\xi, \cdot) = d\langle \mu, \xi \rangle(\cdot)$$
où $X_\xi(p) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot p$.
- μ est G-équivariante par rapport à l'action coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.

Si l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre, alors le quotient

$$X//G := \mu^{-1}(0)/G$$

est une variété symplectique : c'est la *réduction* de X par G. De plus si $L \subset \mu^{-1}(0)$ est un Lagrangien G-invariant, alors $\overline{L} := L/G \subset X//G$ est Lagrangien.

Quelques exemples

- L'action diagonale de S^1 sur $\mathbb{C}^{n+1}$ est Hamiltonienne. Dans ce cas $\mu^{-1}(0) = S^{2n+1}$ et

$$\mathbb{C}^{n+1}//S^1 \cong \mathbb{C}P^n.$$

Quelques exemples

- L'action diagonale de S^1 sur $\mathbb{C}^{n+1}$ est Hamiltonienne. Dans ce cas $\mu^{-1}(0) = S^{2n+1}$ et
$$\mathbb{C}^{n+1}//S^1 \cong \mathbb{C}P^n.$$

- Si G agit sur une variété fermée M, alors G agit Hamiltoniennement sur T^*M. Si l'action de départ est libre, alors
$$(T^*M)//G \cong T^*(M/G).$$

Homologie de Floer Lagrangienne

On suppose que $L_0, L_1 \subset X$ sont deux Lagrangiens fermés qui s'intersectent transversement et en plus

$$\omega \cdot \pi_2(X, L_j) = 0.$$

On fait un choix auxiliaire de structure presque complexe J. Alors, il existe une *fonctionnelle d'action* qui joue le rôle d'une 'fonction de Morse en dimension infinie'.

Homologie de Floer Lagrangienne

On suppose que $L_0, L_1 \subset X$ sont deux Lagrangiens fermés qui s'intersectent transversement et en plus

$$\omega \cdot \pi_2(X, L_j) = 0.$$

On fait un choix auxiliaire de structure presque complexe J. Alors, il existe une *fonctionnelle d'action* qui joue le rôle d'une 'fonction de Morse en dimension infinie'.

- Les points critiques sont les points d'intersection $L_0 \cap L_1$,

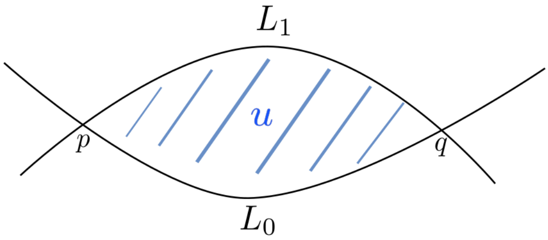
Homologie de Floer Lagrangienne

On suppose que $L_0, L_1 \subset X$ sont deux Lagrangiens fermés qui s'intersectent transversement et en plus

$$\omega \cdot \pi_2(X, L_j) = 0.$$

On fait un choix auxiliaire de structure presque complexe J. Alors, il existe une *fonctionnelle d'action* qui joue le rôle d'une 'fonction de Morse en dimension infinie'.

- Les points critiques sont les points d'intersection $L_0 \cap L_1$,
- les 'lignes de gradient' entre p et q sont des bandes pseudoholomorphes $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \to X$ comme dans l'image :



On joue le même jeu

Pour des J génériques, les espaces de modules de 'lignes de gradient' $\mathcal{M}(p,q)$ sont des variétés lisses. On pose $CF_*(L_0, L_1)$ le $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel libre engendré par $L_0 \cap L_1$ et la différentielle donnée par

$$\partial p = \sum_q \#_2 \mathcal{M}_{[0]}(p,q) \cdot q$$

où on compte seulement les variétés de dimension zéro. Alors $\partial \circ \partial = 0$ et l'homologie obtenue est appelée *l'homologie de Floer* de L_0 et L_1. Elle est indépendante du choix de J et reste invariante si on perturbe l'un des Lagrangiens par une isotopie Hamiltonienne. On la dénote $FH_*(L_0, L_1)$. Si l'intersection entre L_0 et L_1 n'est **pas transverse** (par exemple $L_0 = L_1$) alors on perturbe un des Lagrangiens par une isotopie Hamiltonienne pour la rendre transverse.
On a un isomorphisme canonique

$$FH_*(L,L) := FH_*(L, \varphi^t(L)) \cong MH_*(L).$$

Homologie de Floer équivariante

On fait une construction 'symplectique' de l'homologie équivariante. On rappelle que si M est une variété lisse, alors T^*M est symplectique. De plus si M est munie d'une action de G on peut promouvoir cette action à une action Hamiltonienne sur T^*M. Alors on considère

$$X \times_G T^*EG := X \times T^*EG//G.$$

Homologie de Floer équivariante

On fait une construction 'symplectique' de l'homologie équivariante. On rappelle que si M est une variété lisse, alors T^*M est symplectique. De plus si M est munie d'une action de G on peut promouvoir cette action à une action Hamiltonienne sur T^*M. Alors on considère

$$X \times_G T^*EG := X \times T^*EG//G.$$

Si $L_0, L_1 \subset \mu^{-1}(0)$ sont deux Lagrangiens G-invariants, alors on a deux Lagrangiens

$$L_j \times_G 0_{EG} \subset X \times_G T^*EG//G.$$

On définit ainsi, l'homologie de Floer équivariante de L_0 et L_1 comme

$$FH_*^G(L_0, L_1) := FH_*(L_0 \times_G 0_{EG}, L_1 \times_G 0_{EG}).$$

On observe que cette expression a un sens **même si l'action de** G **sur** X **n'est pas libre**.

L'isomorphisme de Cartan Floer-remix

Soit X une variété symplectique munie d'une action Hamiltonienne de G. Soient $L_0, L_1 \subset \mu^{-1}(0)$ deux Lagrangiens et $\overline{L_j} = L_j/G$ leur reductions. Alors on a

Théorème

Si l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre, alors

$$FH_*^G(L_0, L_1) \cong FH_*(\overline{L_0}, \overline{L_1})$$

De plus, si $L_0 = L_1$, l'isomorphisme est identifié à l'isomorphisme de Cartan classique.

Ce que je ne vous n'ai pas dit

- On ne peut pas travailler avec EG directement car c'est (en général) une variété de dimension infinie, on utilise une approximation en variétés de dimension finie.
- Pour construire des applications qui relient ces différentes approximations on utilise la théorie des 'quilts' pseudoholomorphes. Ce même outil permet de construire l'isomorphisme de Cartan.

Applications

- L'homologie de Floer équivariante a été développée en partie pour travailler sur la *conjecture d'Atiyah-Floer*.
- L'isomorphisme de Cartan nous permet notamment d'étendre la définition de l'homologie de Floer pour des 'variétés' (orbifolds) symplectiques de la forme M/G.

Merci beaucoup !

$G \curvearrowright$