

## MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Résultats de la première vague de septembre 2020

Voici les solutions des premiers problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

**Solution du problème 1 :** Dans l'équation  $ab + 7ac + 15c = abc$ , chaque terme contient un facteur  $c$  sauf le terme  $ab$ , de sorte que  $c$  divise  $ab$ . Comme  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont premiers, cela implique que  $c = a$  ou  $c = b$ . Si  $c = a$ , l'équation devient  $b + 7a + 15 = ab$  après division par  $a$ . Ceci peut se réécrire  $(a - 1)b = 7(a - 1) + 22$ , de sorte que  $a - 1$  divise 22. Donc  $a - 1$  peut être égal à 1, 2, 11 ou 22, et  $a$  peut être égal à 2, 3, 12 ou 23. Mais 12 est exclu car pas premier. Si  $a = 2$ , l'équation donne  $b = 29$  et  $a = 2$ ,  $b = 29$ ,  $c = 2$  est une solution. Si  $a = 3$ , l'équation donne  $b = 18$  qui est à exclure puisque 18 n'est pas premier. Si  $a = 23$ , l'équation donne  $b = 8$  qui est à exclure puisque 8 n'est pas premier. Si au contraire  $c = b$ , l'équation de départ devient  $8a + 15 = ab$  après division par  $b$ . Chaque terme contient un facteur  $a$  sauf le terme 15, de sorte que  $a = 3$  ou  $a = 5$ . Si  $a = 3$ , l'équation donne  $b = 13$  et  $a = 3$ ,  $b = 13$ ,  $c = 13$  est une solution. Si  $a = 5$ , l'équation donne  $b = 11$  et  $a = 5$ ,  $b = 11$ ,  $c = 11$  est une solution. Les trois seules solutions de cette équation sont donc  $(a, b, c) = (2, 29, 2)$ ,  $(3, 13, 13)$  et  $(5, 11, 11)$ .

**Ont fourni une solution correcte :** M. Duvauchelle (4ème au Collège Parc de Villeroy, à Mennecey), A. Bouton (3ème au Collège Le Parc, à Saint-Maur-des-Fossés), A. Z. Truong (3ème au Collège Les Hauts Grillets, à Saint-Germain-en-Laye), A.-P. Poudade (2nde au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), R. Camus (1ère au Lycée Camille See, à Paris), M. Casadei (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), A. Crovisier (1ère au Lycée Lakanal, à Sceaux), P.-M. Esmenjaud (1ère à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Fournial (1ère au Lycée François Joseph Talma, à Brunoy), P. Guichon (1ère au Lycée Sainte Thérèse, à Ozoir-la-Ferrière), M. Krishnan (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), O. Lemoine (1ère au Lycée Marguerite Yourcenar, à Morangis), C. Regnier (1ère à l'Institut Montalembert, à Nogent-sur-Marne), J. Shao (1ère au Lycée Louis Bascan, à Rambouillet), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), F. Binet (Tle au Lycée Blanche de Castille, à Le Chesnay), C. Boden (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), C. Bourotte (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), E. Bruneton (Tle au Lycée Sainte Elisabeth, à Paris), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), G. Collier (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), V. Defransure (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), O. Feuilland (Tle au Lycée Léonard de Vinci, à Levallois-Perret), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), L. Hadifé (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), G. Khalil (Tle au Lycée Chaptal, à Paris), J. Legrand (Tle au Lycée Descartes, à Montigny-le-Bretonneux), V. Llorca (Tle au Lycée Louis de Broglie, à Marly-le-Roi), V. Maigre (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), G. Mushiata Kibulu (Tle au Lycée Saint Martin de France, à Pontoise), A. Ménard (Tle au Lycée Louis de Broglie, à Marly-le-Roi), L. Neveux (Tle à l'Institut de La Tour, à Paris), S. Nougé (Tle au Lycée Blanche de Castille, à Le Chesnay), L. Polderman (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), J. Ramat (Tle au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, à Viry-Châtillon), L. Renaud (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), T. Rezaee (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), C. Spittaël (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux),

A. Thuillier (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), A. Toutain (Tle au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, à Viry-Châtillon), L. Z. Truong (Tle au Lycée international de Saint-Germain-en-Laye, à Saint-Germain-en-Laye), B. Weic (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Misguich (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Loesch (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Dillies (1ère Bachelor à Cambridge University, à Cambridge), D. H. Le (1ère Bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Baccara (MP au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), J. de Sainte Marie (MP au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MP\* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), R. Terrine (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), H. A. Ngo (3ème Bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), Y. Jalalian (L3 à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), L. Rose (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), M. Doumbiya (L3 math à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), J.-L. Fatras (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), S. Richoux (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Vergnolle (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Draux (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), T. Pochart (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), I. Taul (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Eljandoubi (2ème math app à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), P. Anjolras (M1 à l'ENS, à Paris), V. Djamei (M1 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Jerison (M1 à Sorbonne Université, à Paris), C. Vauthier (M1 à l'ENS, à Paris), P. Drouvillé (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), P. Stos (M1 MF à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Damian (M1 math et appl à Sorbonne Université, à Paris), M.-S. Chen (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), J. Roupin (3ème (M1 math-info) à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Abgrall (M2 à l'ENS, à Paris), T.-T. Nghiem (M2 AAG à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), V. Aubry (M2 agrégation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lenoir (M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), M. A. Ben Ghaleb (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), E. Monard (3ème à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (4ème et M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), P. E. Alves Sampaio (3ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), L. Lamrani (3ème à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée de l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), C. Moulin (doctorante au LRI, Université Paris-Saclay, à Orsay), H. Jallouli (Analyste Quantitatif à la Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), B. Berached (Ingénieur informaticien, à Massy), C. Romon (Secrétaire Général de la MI-QCP, à La Défense), D. Collignon (attaché statisticien au secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), I. Botcazou (prof de maths au Lycée Le Corbusier, à Aubervilliers), T. Demoulin (prof de maths au Lycée Branly, à Amiens), C. Lemonnier (prof de maths au Lycée Napoléon, à L'Aigle), M.-Y. Gueddari (stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

**Solution du problème 2 :** Appelons  $c$  le nombre minimal de lycéens ayant utilisé une certaine application de messagerie. Comme celle-ci a été utilisée pour au moins 210 conversations, et qu'il y a  $\frac{c(c-1)}{2}$  paires pouvant converser parmi les  $c$  lycéens, on a  $\frac{c(c-1)}{2} \geq 210$  ce qui implique  $c \geq 21$ .

Si pour chacune des 20 applications utilisées on liste les lycéens l'ayant utilisé, on obtient une liste d'au moins  $20 \times 21 = 420$  noms. Si chacun des 100 lycéens a utilisé au

plus 4 applications différentes, cette liste contiendrait au plus  $100 \times 4 = 400$  noms. Mais comme  $420 > 400$ , cela implique qu'au moins un lycéen a utilisé au moins 5 applications différentes.

**Ont fourni une solution correcte :** A. Bouton (3ème au Collège Le Parc, à Saint-Maur-des-Fossés), M. Nahas (2nde au Lycée Notre Dame du Grandchamp, à Versailles), M. Casadei (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), A. Crovisier (1ère au Lycée Lakanal, à Sceaux), P.-M. Esmenjaud (1ère à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), G. Tefra (1ère au Lycée Saint Louis de Gonzague-Franklin, à Paris), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), F. Binet (Tle au Lycée Blanche de Castille, à Le Chesnay), C. Bourotte (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), G. Collier (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), V. Defransure (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), E. Ehrhart (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), O. Feuilland (Tle au Lycée Léonard de Vinci, à Levallois-Perret), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), L. Hadifé (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), C. Huang (Tle au Lycée international de l'est parisien, à Aubervilliers), A. Jiao (Tle à l'Institut Notre-Dame, à Meudon), F. Kovarik (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), E. L'Hôte (Tle au Lycée Hector Berlioz, à Vincennes), F. Le Febvre de Nailly (Tle au Lycée Sainte-Ursule, à Paris), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Neveux (Tle à l'Institut de La Tour, à Paris), S. Nougué (Tle au Lycée Blanche de Castille, à Le Chesnay), L. Polderman (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), P. Varnet (Tle au Lycée Henry-IV, à Paris), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Misguich (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Alizon (MPSI au Lycée du Parc, à Lyon), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Loesch (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Dillies (1ère Bachelor à Cambridge University, à Cambridge), D. H. Le (1ère Bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), N. Déhais (MP\* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), A. Dallemagne (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), Y. Jalalian (L3 à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), N. Chabaud (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), J.-L. Fatras (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), A. Kirchmeyer (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Richoux (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Vergnolle (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), G. Anquetin (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Draux (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), T. Pochart (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), P. Anjolras (M1 à l'ENS, à Paris), A. Jerison (M1 à Sorbonne Université, à Paris), C. Vauthier (M1 à l'ENS, à Paris), P. Drouvillé (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), P. Stos (M1 MF à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M.-S. Chen (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), J. Roupin (3ème (M1 math-info) à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Abgrall (M2 à l'ENS, à Paris), M. Jean (M2 AA à l'Université de Versailles Saint-Quentin, à Versailles), T.-T. Nghiem (M2 AAG à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), V. Aubry (M2 agrégation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lenoir (M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), M. A. Ben Ghalleb (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), P. E. Alves Sampaio (3ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), L. Basile (3ème à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), L. Lamrani (3ème à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), E. Monard (3ème à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (4ème et M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), J. Muller (docteur au LAGA - Institut Galilée de l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), H. Jallouli (Analyste Quantitatif au Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au

LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (attaché statisticien au secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), C. Lemonnier (prof de maths au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (prof de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), M.-Y. Gueddari (stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

**Solution du problème 3 :** Appelons  $c_1, \dots, c_n$  les  $n$  chiffres (numérotés de gauche à droite) du plus petit nombre épatant  $N$  recherché. On insérant  $d = 2$  entre  $c_1$  et  $c_2$ , on voit que  $c_n$  doit être pair. On insérant  $d = 5$  entre  $c_1$  et  $c_2$ , on voit que  $c_n$  doit être multiple de 5 ; donc  $c_n = 0$ . On insérant  $d = 7$  entre  $c_k$  et  $c_{k+1}$ , puis entre  $c_{k+1}$  et  $c_{k+2}$ , on obtient deux nombres multiples de 7 et qui diffèrent de  $10^{n-k-1}(63 - 9c_{k+1})$ . Pour que cette différence soit un multiple de 7, il faut que  $c_{k+1}$  soit égal à 0 ou 7 pour  $k = 1, \dots, n - 2$ . Comme tous les chiffres  $c_2, \dots, c_n$  sont égaux à 0 ou 7, pour qu'on obtienne un multiple de 7 en rajoutant un chiffre  $d = 7$  entre deux de ces chiffres, on doit avoir  $c_1 = 7$ . En considérant maintenant  $d = 9$ , on voit que la somme des chiffres de  $N$  doit être un multiple de 9. On doit donc avoir au moins 9 chiffres 7 dans  $N$ , les autres chiffres étant des 0. En insérant  $d = 8$  entre  $c_1$  et  $c_2$ , on voit que le nombre formé des 3 derniers chiffres de  $N$  doit être un multiple de 8. Mais les possibilités sont 770, 700, 070 et 000, et seule la dernière donne un multiple de 8. Ainsi, pour minimiser  $N$  et le nombre de ses chiffres,  $N$  doit être constitué de 9 fois le chiffre 7 puis 3 fois le chiffre 0, et on vérifie facilement que ce nombre 777777777000 est épatant.

**Ont fourni une solution correcte :** A. Bouton (3ème au Collège Le Parc, à Saint-Maur-des-Fossés), P. Guichon (1ère au Lycée Sainte Thérèse, à Ozoir-la-Ferrière), A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), G. Collier (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), V. Llorca (Tle au Lycée Louis de Broglie, à Marly-le-Roi), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), G. Mushiata Kibulu (Tle au Lycée Saint Martin de France, à Pontoise), L. Neveux (Tle à l'Institut de La Tour, à Paris), L. Polderman (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), B. Weic (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Misguich (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Alizon (MPSI au Lycée du Parc, à Lyon), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Dillies (1ère Bachelor à Cambridge University, à Cambridge), S. Kerbourc'h (MP au Lycée Michelet, à Vanves), J. de Sainte Marie (MP au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MP\* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Chabaud (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), L. Rose (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Yax (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), S. Richoux (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), P. Anjolras (M1 à l'ENS, à Paris), V. Djamei (M1 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), C. Vauthier (M1 à l'ENS, à Paris), P. Drouvillé (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), P. Stos (M1 MF à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Damian (M1 math et appl à Sorbonne Université, à Paris), M.-S. Chen (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), J. Roupin (3ème (M1 math-info) à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), G. Anquetin (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Draux (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), T. Pochart (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), I. Tauil (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Abgrall (M2 à l'ENS, à Paris), M. Jean (M2 AA à l'Université de Versailles Saint-Quentin, à Versailles), T.-T. Nghiem (M2 AAG à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), V. Aubry (M2

agrégation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lenoir (M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), M. A. Ben Ghaleb (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), L. Basile (3ème à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), L. Lamrani (3ème à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), E. Monard (3ème à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (4ème et M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée (Université Sorbonne Paris Nord), à Villetaneuse), G. Soudais (doctorant à Telecom Paris et Bell Labs, à Palaiseau et Nozay), C. Moulin (doctorante au LRI, Université Paris-Saclay, à Orsay), H. Jallouli (Analyste Quantitatif à la Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (attaché statisticien au secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), Y. Naouz (ingénieur génie civil chez Eiffage, à Châtillon), P. Vernier (prof de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), M.-Y. Gueddari (stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

**Solution du problème 4 :** Appelons  $P(x, y)$  l'affirmation que  $f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2 + y$ . Alors  $P(x, -(f(x))^2)$  dit qu'il existe un réel  $c$  tel que  $f(c) = 0$ . Ensuite  $P(c, y)$  dit que  $f(f(y)) = y$ , alors que  $P(0, y)$  dit que  $f(f(y)) = (f(0))^2 + y$ . En comparant, on voit que  $f(0) = 0$ . Donc  $P(x, 0)$  dit que  $f(xf(x)) = (f(x))^2$  et  $P(f(x), 0)$  dit que  $f(f(x)x) = x^2$ , puisque l'on a déjà vu que  $f(f(y)) = y$  pour tout réel  $y$ . En comparant, on voit que  $(f(x))^2 = x^2$  pour tout réel  $x$ , de sorte que  $f(x) = \pm x$  pour tout réel  $x$ . Supposons qu'il existe un réel  $a \neq 0$  tel que  $f(a) = a$  et un réel  $b \neq 0$  tel que  $f(b) = -b$ . Alors  $P(a, b)$  dit que  $f(a^2 - b) = a^2 + b$ . Mais alors soit  $a^2 - b = a^2 + b$ , soit  $a^2 - b = -(a^2 + b)$ . La première possibilité donne  $b = 0$ , une contradiction, et la deuxième donne  $a = 0$ , une autre contradiction. Donc le signe dans l'expression de  $f$  est le même pour tous les réels, de sorte que  $f(x) = x$  pour tout réel  $x$  ou bien  $f(x) = -x$  pour tout réel  $x$ . On voit facilement que ces deux fonctions satisfont à l'équation de départ, ce sont donc les deux seules fonctions recherchées.

**Ont fourni une solution correcte :** A. Bouton (3ème au Collège Le Parc, à Saint-Maur-des-Fossés), A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), L. Fonteniaud (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), A. Jiao (Tle à l'Institut Notre-Dame, à Meudon), G. Khalil (Tle au Lycée Chaptal, à Paris), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), C. Spittael (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), P. Varnet (Tle au Lycée Henry-IV, à Paris), B. Weic (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Loesch (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Dillies (1ère Bachelor à Cambridge University, à Cambridge), D. H. Le (1ère Bachelor à l'École Polytechnique, à Palaiseau), M. Baccara (MP au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), J. de Sainte Marie (MP au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MP\* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), A. Dallemagne (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), R. Terrine (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), H. A. Ngo (3ème Bachelor à l'École Polytechnique, à Palaiseau), Y. Jalian (L3 à l'École Polytechnique, à Palaiseau), N. Chabaud (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Segovia (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), J.-L. Fatras (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), P.-M. Esmenjaud (1ère à l'École

Polytechnique, à Palaiseau), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), A. Kirchmeyer (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), P. Anjolras (M1 à l'ENS, à Paris), A. Jerison (M1 à Sorbonne Université, à Paris), C. Vauthier (M1 à l'ENS, à Paris), P. Drouvillé (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Damian (M1 math et appl à Sorbonne Université, à Paris), M.-S. Chen (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), J. Roupin (3ème (M1 math-info) à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), G. Anquetin (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Draux (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), T. Pochart (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), I. Tauil (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Eljandoubi (2ème math app à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), A. Abgrall (M2 à l'ENS, à Paris), M. Jean (M2 AA à l'Université de Versailles Saint-Quentin, à Versailles), V. Aubry (M2 agrégation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lenoir (M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), P. E. Alves Sampaio (3ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), L. Lamrani (3ème à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), E. Monard (3ème à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (4ème et M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée (Université Sorbonne Paris Nord), à Villetaneuse), H. Jallouli (Analyste Quantitatif à la Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), Y. Naouz (ingénieur génie civil chez Eiffage, à Châtillon), C. Lemonnier (prof de maths au Lycée Napoléon, à L'Aigle), M.-Y. Gueddari (stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).