Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la deuxième vague de novembre 2021

Voici les solutions de la deuxième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 5 : Il est possible d'obtenir comme dernier nombre au tableau n'importe quel entier impair entre 1 et 2021 inclus.
Montrons d'abord que ce dernier nombre est forcément impair. Remplacer x et y par $|x-y|$ diminue la somme des nombres écrits au tableau de $x+y-|x-y|$ soit 2 fois la valeur du plus petit nombre parmi x et y. Ainsi, la somme des nombres écrits au tableau garde toujours la même parité. Au début, il s'agit de $1+2+\ldots+2021 = \frac{1}{2} \times 2021 \times 2022 = 2021 \times 1011$ qui est impair, et à la fin c'est juste le dernier nombre au tableau, qui est donc impair également.
Ensuite, remarquons que l'on ne peut écrire que des entiers entre 0 et 2021 au tableau, puisque $0 \leq |x-y| \leq \max(x, y)$ et que le plus grand nombre initialement au tableau est 2021. On en déduit que seuls les entiers impairs entre 1 et 2021 peuvent être obtenus.
Réciproquement, soit k un entier impair entre 1 et 2021. Remplaçons successivement par 1 les paires d'entiers 1 et 2, puis 3 et 4, ..., $k-2$ et $k-1$, ainsi que les paires d'entiers $k+1$ et $k+2$, $k+3$ et $k+4$, ..., 2020 et 2021. On obtient ainsi au tableau $\frac{1}{2}(2021-1) = 1010$ fois le nombre 1, ainsi que le nombre k. Remplaçons alors 505 fois une paire d'entiers 1 et 1 par l'entier 0. On obtient ainsi 505 fois l'entier 0, ainsi que le nombre k. Remplaçons enfin 505 fois la paire d'entiers 0 et k par l'entier k, ce qui élimine tous les 0 et ne laisse que le nombre k comme souhaité.

Ont fourni une solution correcte : L. Choné (3ème au Collège Evariste Galois, à Bourg-la-Reine), R. Crovisier (3ème au Collège La Fontaine, à Antony), J. Coulombel (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), P. Duvivier (1ère au Lycée René Cassin, à Arpajon), A. Fortin (1ère au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine), C. Hebey (1ère au Lycée Charlemagne, à Paris), J. Hoarau (1ère au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), J. Scardigli (1ère bachelor au Cambridge University, à Cambridge), Y. Sepulchre (1ère au Lycée François-Joseph Talma, à Brunoy), S. Aidan (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), A. Duchemin (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), V. Le Febvre de Nailly (Tle au Lycée Sainte-Ursule, à Paris), O. Lemoine (Tle au Lycée Marguerite Yourcenar, à Morangis), A. Mathys (Tle au Lycée Edmond Michelet, à Arpajon), N. Morange (Tle au Lycée Notre-Dame, à Bourg-la-Reine), P. Texier-Bourrouilh (Tle au Lycée Jean-Baptiste Say, à Paris), G. Tomczak (Tle au Lycée Saint Charles, à Athis-Mons), H. Chalandon-Goskrzynski (MPSI à l'Optimal, à Paris), T. Charles (MPSI au Lycée du Parc, à Lyon), L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), J. Clement-Cottuz (1ère année à l'ENSIMAG, à Saint-Martin-d'Hères), C. Daignan Fornier de Lachaux (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Déhais (L3 maths + magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), B. Lombard (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), J. Namazi (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), A. Prevost (L3 maths + magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lejeune (M1 à l'ENS, à Paris), B. Goujaud (doctorant à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), M. Farid (consultant chez Awalee Consulting, à Paris), D. H. Le (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Lemonnier (professeure au Collège Yves Montand, à Val-au-Perche), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par L. Enderli (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Israël (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et E. Van Der Rest (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par E. Boudriga (Tle au Lycée Les Haberges, à Vesoul), B. Paoli (Tle au Lycée Les Haberges, à Vesoul) et T. Pequegnot (Tle au Lycée Les Haberges, à Vesoul), l'équipe formée par A. Joatton (Tle au Lycée du Parc, à Lyon) et C. Vacher (Tle au Lycée du Parc, à Lyon), l'équipe formée par T. Gu (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et L. Zhang (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par F. Arous (L1 maths à l'Université de Paris, à Paris) et T. De Wolf (1ère année BASc à l'Université de Paris, à Paris et au Sciences Po, à Paris), l'équipe formée par O. Sabatin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Vautrin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par E. Monard (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (colleur en CPGE au Lycée Stanislas, à Paris).

Solution du problème 6 : Soit $\mathcal{T}$ la droite tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point A. Soit $P \in \mathcal{T}$ (respectivement $Q \in \mathcal{T}$) situé du même côté de A que l'arc de $\mathcal{C}$ joignant A et B (respectivement D) sans passer par C. Par le théorème de l'angle inscrit, les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{PAB}$ sont égaux.
Soit $\mathcal{T}_1$ la droite tangente au cercle $\mathcal{C}_1$ au point A. Soit $P_1 \in \mathcal{T}_1$ (respectivement $Q_1 \in \mathcal{T}_1$) situé du même côté de A que l'arc de $\mathcal{C}_1$ joignant A et L (respectivement K) sans passer par K (respectivement L). Par le théorème de l'angle inscrit, les angles $\widehat{AKL}$ et $\widehat{P_1AL}$ sont égaux.
Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont tangents entre eux (forcément au point A) si et seulement si leurs tangentes au point A sont confondues : $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$. D'autre part, comme A, B et L sont alignés dans cet ordre, les angles $\widehat{PAB}$ et $\widehat{P_1AL}$ sont égaux si et seulement si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$. Cette égalité d'angles est elle-même équivalente à $\widehat{ADB} = \widehat{AKL}$, qui est équivalent au parallélisme des droites BD et KL.
Soit $\mathcal{T}'$ la droite tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point C. Soit $P' \in \mathcal{T}'$ (respectivement $Q' \in \mathcal{T}'$) situé du même côté de C que l'arc de $\mathcal{C}$ joignant C et D (respectivement B) sans passer par A. Par le théorème de l'angle inscrit, les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{P'CD}$ sont égaux. Comme D, C et L sont alignés (dans cet ordre) et que P', C, Q' sont alignés (dans cet ordre), les angles $\widehat{P'CD}$ et $\widehat{Q'CL}$ sont égaux.
Soit $\mathcal{T}_2$ la droite tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ au point C. Soit $P_2 \in \mathcal{T}_2$ (respectivement $Q_2 \in \mathcal{T}_2$) situé du même côté de C que l'arc de $\mathcal{C}_2$ joignant C et K (respectivement L) sans passer par L (respectivement K). Par le théorème de l'angle inscrit, les angles $\widehat{CKL}$ et $\widehat{Q_2CL}$

sont égaux.
Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents entre eux (forcément au point C) si et seulement si leurs tangentes au point C sont confondues : $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_2$. D'autre part, les angles $\widehat{Q'CL}$ et $\widehat{Q_2CL}$ sont égaux si et seulement si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$. Cette égalité d'angles est elle-même équivalente à $\widehat{CBD} = \widehat{CKL}$, qui est équivalent au parallélisme des droites BD et KL.
Par conséquent, la tangence des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ ainsi que des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2$ sont chacune équivalente au parallélisme des droites BD et KL.

Ont fourni une solution correcte : L. Choné (3ème au Collège Evariste Galois, à Bourg-la-Reine), A. Duchemin (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lejeune (M1 à l'ENS, à Paris), B. Goujaud (doctorant à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), D. H. Le (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par L. Enderli (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Israël (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et E. Van Der Rest (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par A. Joatton (Tle au Lycée du Parc, à Lyon) et C. Vacher (Tle au Lycée du Parc, à Lyon), l'équipe formée par O. Sabatin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Vautrin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 7 : Etant donné un ensemble A de symboles parmi ceux de SP$\mathcal{E}$CTRE, notons $\mathcal{T}(A)$ l'ensemble des membres ayant un identifiant contenant tous les symboles de A, et $\mathcal{U}(A)$ l'ensemble des membre ayant un identifiant contenant au moins l'un des symboles de A. Par hypothèse, $|\mathcal{U}(A)|$ est pair si $1 \leq |A| \leq 6$.
Montrons par récurrence sur $|A|$ que $|\mathcal{T}(A)|$ est pair également, tant que $1 \leq |A| \leq 6$. Pour $|A| = 1$, les ensembles $\mathcal{T}(A)$ et $\mathcal{U}(A)$ coïncident, et il n'y a rien à prouver. Pour $2 \leq |A| \leq 6$, on peut écrire $\mathcal{U}(A) = \cup_B \mathcal{T}(B)$ où l'union porte sur tous les singletons B contenus dans A. Par le principe d'inclusion-exclusion on a donc

$$|\mathcal{U}(A)| = \sum_{i=1}^{|A|} (-1)^{i-1} \sum_{B \subset A, |B|=i} |\mathcal{T}(B)|.$$

On peut ainsi écrire $|\mathcal{T}(A)|$ comme somme de $|\mathcal{U}(A)|$ qui est pair par hypothèse, et de termes $\pm|\mathcal{T}(B)|$ avec $|B| \leq A$ qui sont pairs par l'hypothèse de récurrence.
Ceci implique qu'il y a un membre dont l'identifiant est l'ensemble de tous les 7 symboles. Pour le voir, supposons par l'absurde que tous les identifiants comptent au plus $k < 7$ symboles. Soit A l'ensemble des symboles d'un identifiant à k symboles, de sorte

que $|\mathcal{T}(A)|$ est pair. Comme ce nombre est non nul, il vaut au moins 2, de sorte qu'il y a au moins un identifiant contenant tous les symboles de A et au moins un autre symbole, ce qui contredit notre hypothèse.
Montrons maintenant par récurrence descendante sur $1 \leq |A| \leq 7$ que $|\mathcal{T}(A)| = 2^{7-|A|}$, c'est-à-dire que toutes les listes de symboles contenant A sont des identifiants. Pour $|A| = 7$, nous venons justement que montrer qu'il y a un membre (et forcément pas plus) dont l'identifiant est l'ensemble de tous les 7 symboles. Pour $1 \leq |A| \leq 6$, $\mathcal{T}(A)$ contient tous les ensembles de la forme $\mathcal{T}(A')$ avec $A \subsetneq A'$, qui contiennent à leur tour toutes les listes de symboles contenant A'. On trouve ainsi $2^{7-|A|} - 1$ éléments dans $\mathcal{T}(A)$, à savoir tous les identifiants comprenant ceux de A plus au moins un autre symbole parmi les $7 - |A|$ restants. Comme cet ensemble a un nombre pair d'éléments, il doit contenir au moins un identifiant de plus, or il n'y en a plus qu'un possible : la liste de tous les symboles de A, ce qui donne $|\mathcal{T}(A)| = 2^{7-|A|}$ comme annoncé.
Enfin, comme tout identifiant comprend au moins un symbole, l'ensemble de tous les identifiants est $\cup_A \mathcal{T}(A)$ où la réunion porte sur tous les singletons A. Nous venons de montrer que ceci n'est autre que l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides de symboles choisis parmi les 7 symboles disponibles. Le SP$\mathcal{E}$CTRE compte donc exactement $2^7 - 1 = 127$ membres.

Ont fourni une solution correcte : S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), B. Goujaud (doctorant à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), D. H. Le (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par T. Gu (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et L. Zhang (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par F. Arous (L1 maths à l'Université de Paris, à Paris) et T. De Wolf (1ère année BASc à l'Université de Paris, à Paris et au Sciences Po, à Paris), l'équipe formée par O. Sabatin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Vautrin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 8 : Divers marathoniens ont résolu ce problème en considérant les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe sous-jacent, obtenues en calculant d'abord celles de son carré. Voici une démonstration purement combinatoire ; merci à Christian Roman d'avoir signalé des erreurs dans la solution initialement proposée.
Supposons par contradiction qu'aucun participant ne soit co-auteur de tous les autres, et notons C_M l'ensemble des co-auteurs d'un participant M. Alors C_M a le même nombre d'éléments pour tout participant M. On commence par montrer que $|C_{M_1}| = |C_{M_2}|$ lorsque M_1 et M_2 ne sont pas co-auteurs. A tout $M \in C_{M_1}$, on associe l'unique co-auteur commun de M et de M_2. Ceci définit une application $f : C_{M_1} \to C_{M_2}$ injective. En effet, si $f(M) = f(M')$ et $M \neq M'$, ces derniers ont à la fois M_1 et $f(M) = f(M')$ comme co-

auteur commun, ce qui est impossible. Donc $|C_{M_2}| \geq |C_{M_1}|$ et par symétrie $|C_{M_2}| = |C_{M_1}|$.
Pour montrer que $|C_{M_1}| = |C_{M_2}|$ lorsque M_1 et M_2 sont co-auteurs, soit M_1' un participant non co-auteur de M_1 et M_2' un participant non co-auteur de M_2 (qui existent par notre hypothèse de contradiction), de sorte que $|C_{M_1}| = |C_{M_1'}|$ et $|C_{M_2}| = |C_{M_2'}|$. Ceci implique l'égalité souhaitée à moins que $M_1' \neq M_2'$, que M_1 soit co-auteur de M_2' et que M_2 soit co-auteur de M_1'. Mais alors M_1' et M_2' ne peuvent être co-auteurs, sinon M_1 et M_1' seraient tous deux co-auteurs communs de M_2 et M_2', ce qui est impossible. On obtient donc $|C_{M_1'}| = |C_{M_2'}|$ et par suite l'égalité souhaitée.
Notons k le nombre de co-auteurs de chaque participant. Alors la conférence compte exactement $k^2 - k + 1$ participants. En effet, soit M_0 un participant. Par hypothèse, tout autre participant est co-auteur d'exactement l'un des k co-auteurs de M_0. Mais chacun de ces co-auteurs a $k-1$ co-auteurs distincts de M_0, ce qui donne $k(k-1)$ autres participants, donc $k^2 - k + 1$ participants en tout.
Appelons une n-chaîne de co-auteurs une liste ordonnée $M_0M_1M_2 \dots M_n$ de participants dans laquelle chacun est co-auteur du suivant. Si de plus $M_n = M_0$, on parlera de n-cycle de co-auteurs. Soit $C(n)$ le nombre de n-cycles de co-auteurs. Le nombre de n-cycles de co-auteurs pour lesquels $M_{n-2} = M_0$ est $kC(n-2)$, puisque c'est la donnée d'un $(n-2)$-cycle de co-auteurs et de M_{n-1} qui est l'un des k co-auteurs de M_0. D'autre part, le nombre de n-cycle de co-auteurs pour lesquels $M_{n-2} \neq M_0$ est égal au nombre de chaînes de co-auteurs de la forme $M_0M_1 \dots M_{n-2}$ avec $M_{n-2} \neq M_0$, puisque M_{n-1} doit être l'unique co-auteur commun de M_{n-2} et M_0. Ce nombre est $[k(k-1)+1]k^{n-2} - C(n-2)$. Donc $C(n) = (k-1)C(n-2) + [k(k-1)+1]k^{n-2}$. En particulier, $C(n) - 1$ est un multiple de $k-1$.
D'autre part, si p est premier, $C(p)$ est un multiple de p, car les chaînes de la forme $M_0M_1M_2 \dots M_p$ avec $M_0 = M_p$ peuvent être regroupées en paquets de p chaînes qui ne diffèrent que par une permutation cyclique (si deux des p chaînes du paquet sont égales, elles le sont toutes puisque p est premier). Mais alors si p est un diviseur premier de $k-1$, on obtient à la fois que $C(p)$ et que $C(p) - 1$ sont multiples de p, une contradiction.
Par conséquent, il existe bien un participant qui est co-auteur de tous les autres participants.

Ont fourni une solution correcte : S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), M. Farid (consultant chez Awalee Consulting, à Paris), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay).