Marathon d'Orsay de Mathématiques

Novembre 2020

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 7 décembre 2020 à 14h**, par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon). Le bâtiment 307 n'étant plus accessible qu'à très peu de personnes, la boîte en carton ne pourra pas être utilisée cette fois pour le retour des solutions.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 5 (semi et complet)

Marie a choisi trois suites arithmétiques d'entiers positifs. Elle remarque que chacun des entiers 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 apparaît dans au moins l'une de ces suites. Est-il vrai que l'entier 2020 fait nécessairement partie de l'une de ces suites ?

(On rappelle qu'une suite $u_0, u_1, u_2, \ldots$ est arithmétique si la différence $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de $n \geq 0$.)

Problème 6 (semi et complet)

On considère trois points A, B, C du plan, tels que les segments $[A, B]$ et $[A, C]$ soient de même longueur. On choisit un point D dans le segment $[B, C]$, mais distinct de B et de C. Soit B' le point antipodal à B sur le cercle circonscrit au triangle ABD. Soit C' le point antipodal à C sur le cercle circonscrit au triangle ADC. Soit enfin M le milieu du segment $[B', C']$. Pour quelle(s) position(s) du point D le triangle MBC a-t-il une aire maximale ?

Problème 7 (complet)

Dans un groupe de n amis, chacun joue à un jeu de hasard différent, de sorte que le $m^{\text{ième}}$ ami a exactement une chance sur $2m + 1$ de gagner à son jeu, pour $m = 1, \ldots, n$. Quelle est la probabilité que le nombre d'amis remportant la victoire soit impair ?

Problème 8 (complet)

Existe-t-il un triangle T tel que, quelle que soit la manière de colorier tous les points du plan avec deux couleurs, on puisse toujours trouver un triangle T' isométrique à T et dont tous les sommets sont de même couleur ?