Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la première vague de novembre 2017

Voici les solutions des premiers problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte. L'équipe du Marathon vous souhaite de joyeuses fêtes de fin d'année et vous retrouvera en janvier 2018 pour la deuxième vague de problèmes.

Solution du problème 1 : Numérotons les 4 marques de dosettes de 0 à 3. Jean peut acheter i dosettes de la marque i et les peser ensemble en une seule fois. Si toutes les dosettes pesaient 5 grammes, Jean lirait $(1+2+3)\times 5 = 30$ grammes sur la balance. Dans notre situation, si il lit $30 - i \times 0,5$ grammes, c'est la marque i qui triche. Cette solution lui coûte $6 \times 0,35 + 2 = 4,10$ euros. Il s'agit de la solution la plus économique, car avec au moins 2 pesées, Jean ne pourrait plus acheter de dosettes pour ce budget. Avec une seule pesée, il faut des nombres différents de dosettes pour chaque marque afin de pouvoir les distinguer. Les 4 premiers entiers non négatifs sont 0, 1, 2 et 3, ce qui donne le nombre minimal $1+2+3 = 6$ de dosettes à acheter.

Ont fourni une solution correcte : A. Bonnet (1ère S au Lycée Michelet, Vanves), N. Déhais (1ère S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), P. Lafitte (1ère S au Lycée Fustel de Coulanges, Massy), T. Laurenceau-Frugier (1ère S au Lycée François-Joseph Talma, Brunoy), L. Rodrigues (1ère S au Lycée du parc des Loges, Evry), N. Dias (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), L. Fliche (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), R. Moyeuvre (Tle S au Lycée Gaspard Monge, Savigny-sur-Orge), E. Vafiades (Tle S au Lycée Frédéric Mistral, Fresnes), A. Pacco (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), G. Lasnier (L3 MFA à UPSud, Orsay), K. Lefki (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), T. Soullard (L3 MFA à UPSud, Orsay), B. Willenbucher (L3 MFA à UPSud, Orsay), D. Albertin (M2 FES à UPSud, Orsay), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), D. Mavaleix-Marchessoux (doctorant à l'ENSTA ParisTech, Palaiseau), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin), S. Lelièvre (MCF au LMO, Orsay).

Solution du problème 2 : Soient P_1 et P_2 les points de tangence de C_1 et C_2 avec AB, et soient O_1 et O_2 les centres de C_1 et C_2. L'aire du parallélogramme $ABCD$ est le produit de la longueur $|AB|$ par la hauteur correspondante. Cette hauteur est le diamètre des cercles C_1 et C_2, c'est-à-dire 2. D'autre part, $|AB| = |AP_2| + |P_2P_1| + |P_1B| = \sqrt{3} + 2 + |P_1B|$, puisque $P_2P_1O_1O_2$ est un rectangle 2×1. Pour calculer $|P_1B|$, commençons par calculer l'angle $\widehat{DAB} = 2\widehat{O_2AP_2}$. Comme $\tan \widehat{O_2AP_2} = \frac{|O_2P_2|}{|AP_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\widehat{O_2AP_2} = 30°$ donc $\widehat{DAB} = 60°$. Comme DA et BC sont parallèles, $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{DAB} = 120°$. Donc $\widehat{P_1BO_1} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 60°$, et $|P_1B| = \frac{|O_1P_1|}{\tan \widehat{P_1BO_1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. L'aire recherchée est donc égale à $2|AB| = 2(\sqrt{3} + 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = 4 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Ont fourni une solution correcte : C. Lamy (2nde au Lycée Einstein, Sainte Geneviève des Bois), A. Bonnet (1ère S au Lycée Michelet, Vanves), N. Déhais (1ère S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), P. Lafitte (1ère S au Lycée Fustel de Coulanges, Massy), T. Laurenceau-Frugier (1ère S au Lycée François-Joseph Talma, Brunoy), G. Chilla (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), N. Dias (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), L. Fliche (Tle

S au Lycée Lakanal, Sceaux), B. Gonin (Tle S au Lycée Descartes, Antony), R. Moyeuvre (Tle S au Lycée Gaspard Monge, Savigny-sur-Orge), B. Nguyen (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), E. Vafiades (Tle S au Lycée Frédéric Mistral, Fresnes), M. Biroli (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), A. Pacco (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), M.K. Tran (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), G. Lasnier (L3 MFA à UPSud, Orsay), T. Soullard (L3 MFA à UPSud, Orsay), B. Willenbucher (L3 MFA à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), D. Albertin (M2 FES à UPSud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), R. Franklin (M2 agreg à UPSud, Orsay), B. Duvocelle (doctorant à la School of Business and Economics, Maastricht University), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), D. Mavaleix-Marchessoux (doctorant à l'ENSTA ParisTech, Palaiseau), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin).

Solution du problème 3 : Puisque $a+3 > 3$ divise a^2+2, il divise aussi $a^2+2-a(a+3) = -3a+2$, ainsi que $-3a+2+3(a+3) = 11$. Le seul diviseur supérieur à 3 de 11 est lui-même, de sorte que $a+3 = 11$. Par conséquent, $a = 8$ et en injectant dans l'équation on trouve $b = 6$. Le couple $(8, 6)$ est donc l'unique solution.

Ont fourni une solution correcte : A. Berached (3ème au Collège Ile de France, Villebon-sur-Yvette), A. Bonnet (1ère S au Lycée Michelet, Vanves), N. Déhais (1ère S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), S. Kerbourc'h (1ère S au Lycée Michelet, Vanves), R. Brosseron (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), N. Dias (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), B. Nguyen (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), E. Vafiades (Tle S au Lycée Frédéric Mistral, Fresnes), S. Aryan (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), M. Biroli (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), Z. Fahmi Mohamed (L1 MPI à UPSud, Orsay), A. Pacco (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), M.K. Tran (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), C. Boricaud (L3 MFA à UPSud, Orsay, D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), L. Hahn (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), G. Lasnier (L3 MFA à UPSud, Orsay), K. Lefki (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), T. Soullard (L3 MFA à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), R. Franklin (M2 agreg à UPSud, Orsay), B. Duvocelle (doctorant à la School of Business and Economics, Maastricht University), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), D. Mavaleix-Marchessous (doctorant à l'ENSTA ParisTech, Palaiseau), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin), S. Lelièvre (MCF au LMO, Orsay).

Solution du problème 4 : Notons a_i, pour $i = 1, \ldots, 45$, le nombre total d'heures durant lesquelles Rémi a couru pendant les i premiers jours de son entraînement. On a $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{45} \leq 75$. Posons $b_i = a_i + 14$ pour $i = 1, \ldots, 45$, de sorte que $15 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_{45} \leq 89$. Les 90 entiers $a_1, \ldots, a_{45}, b_1, \ldots, b_{45}$ sont en particulier compris entre 1 et 89. Donc deux d'entre eux au moins doivent être égaux. Comme les a_i et les b_i croissent strictement avec i, on ne peut avoir $a_i = a_j$ ou $b_i = b_j$ avec $i \neq j$. C'est donc que $a_i = b_j$ pour certains $i, j \in \{1, \ldots, 45\}$. En d'autres termes, $a_i - a_j = 14$, ce qui signifie que Rémi a couru exactement 14 heures durant les jours $j+1$ à i.

Ont fourni une solution correcte : N. Déhais (1ère S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), S. Aryan (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), M. Biroli (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), A. Pacco (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), M.K. Tran (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), L. Hahn (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), B. Willenbucher (L3 MFA à UPSud, Orsay), D. Albertin (M2 FES à UPSud, Orsay), R. Franklin (M2 agreg à UPSud, Orsay), B. Duvocelle (doctorant à la School of Business and Economics, Maastricht University), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), D. Mavaleix-Marchessoux (doctorant à l'ENSTA ParisTech, Palaiseau), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay).