# Marathon d'Orsay de Mathématiques

Solutions de la quatrième vague de mars 2021

**Solution du problème 13 :** M'enfin, les observations étranges de Gaston suffisent à s'assurer que chaque ballotin contient le même nombre d'oeufs en chocolat. La répartition des oeufs dans les ballotins est donnée par un 13-uple de nombres entiers $\geq 0$. Faisons à notre tour 3 observations :

1. Si un 13-uple d'entiers $\geq k$ satisfait aux observations de Gaston, alors le 13-uple obtenu en soustrayant $k$ de chaque composante satisfait aussi à ces observations (car cela revient à retirer $6k$ oeufs de chaque plateau de la balance).
2. Si un 13-uple satisfait aux observations de Gaston, alors le 13-uple obtenu en divisant chaque composante par un facteur commun $d$ satisfait aussi à ces observations (car cela revient à diviser par $d$ le nombre d'oeufs sur chaque plateau de la balance).
3. Tous les entiers d'un 13-uple satisfaisant aux observations de Gaston ont nécessairement la même parité. En effet, le nombre d'oeufs contenus dans 12 des 13 ballotins est toujours pair (puisqu'il y en aura le même nombre sur chaque plateau de la balance), quel que soit le 13ème ballotin laissé de côté. La parité du nombre d'oeufs dans ce dernier ballotin coïncide donc avec la parité du nombre total d'oeufs, quel que soit ce dernier ballotin.

Par l'observation 1, on peut soustraire le plus petit nombre d'oeufs de chaque composante du 13-uple et obtenir un autre 13-uple satisfaisant aux observations de Gaston et contenant au moins une composante nulle (et en particulier paire). Par l'observation 3, toutes les composantes de ce 13-uple sont paires. Par l'observation 2, on peut diviser toutes les composantes de ce 13-uple par 2 afin d'obtenir un 13-uple d'entiers plus petits satisfaisant aux observations de Gaston. Comme l'une de composantes au moins reste nulle, on peut répéter cette opération indéfiniment. Cela implique que toutes les composantes sont nulles : les composantes du 13-uple de départ étaient toutes égales.

**Ont fourni une solution correcte :** A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), E. Ehrhart (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), J. Legrand (Tle au Lycée Descartes, à Montigny-le-Bretonneux), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Polderman (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), J. Scardigli (Tle au Lycée Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), C. Spittael (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), J. de Sainte Marie (MP au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MP* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), F. M. Tchouli (L2 math-économie à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), P.-A. Monard (4ème et M2 agreg à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), E. Monard (3ème à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée (Université Sorbonne Paris Nord), à Villetaneuse), I. Tauil (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), H. Jallouli (Analyste Quantitatif à la Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (Attaché statisticien pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), M.-Y. Gueddari (Stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

**Solution du problème 14 :** Appelons score d'un élève le nombre de duels remportés par celui-ci. Montrons que les scores obtenus après un tournoi de $N \geq 2$ élèves sont tous les entiers de 0 à $N-1$, par récurrence sur $N$. Cette propriété est clairement vraie pour $N = 2$, puisqu'un élève aura gagné l'unique duel et l'autre l'aura perdu. Supposons que cette propriété soit vraie pour un tournoi de $N-1$ élèves et considérons un tournoi de $N$ élèves. Soit $A$ un élève avec le plus grand score obtenu, montrons que $A$ a remporté tous ses duels. En argumentant par contradiction, soit $C$ un élève qui a remporté son duel contre $A$. Comme le score de $C$ ne peut dépasser celui de $A$, il faut que l'un des élèves battus par $A$, appelons-le $B$, ait battu $C$. Mais l'énoncé interdit l'existence de 3 tels élèves $A, B, C$, donnant la contradiction souhaitée. Comme $A$ a remporté tous ses duels, son score est de $N-1$. Considérons les $N-1$ autres élèves : comme ils ont tous perdu contre $A$, leur score est le même que celui obtenu pour la partie du tournoi excluant les duels avec $A$. Par l'hypothèse de récurrence, les scores de ces $N-1$ élèves sont tous les entiers de 0 à $N-2$. En incluant $A$, on obtient tous les entiers de 0 à $N-1$ comme souhaité.
Dans le cas d'un tournoi de 250 élèves, il y en a exactement 100 qui ont obtenu un score entre 0 et 99, strictement inférieur à 100. Il y en a donc 250-100=150 qui ont remporté au moins 100 duels.

**Ont fourni une solution correcte :** P. Anh-Ton (1ère au Lycée Jeanne d'Arc, à Brétigny-sur-Orge), A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), V. Defransure (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), O. Drapeau (Tle au Lycée Marx Dormoy, à Champigny sur Marne), E. Ehrhart (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), F. Le Febvre de Nailly (Tle au Lycée Sainte-Ursule, à Paris), J. Legrand (Tle au Lycée Descartes, à Montigny-le-Bretonneux), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Polderman (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), J. Scardigli (Tle au Lycée Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), P. Varnet (Tle au Lycée Henry-IV, à Paris), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), H. Chalandon (Tle intégrée à l'IPESUP, à Paris), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), L. Vautrin (LDD1 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), J. de Sainte Marie (MP au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MP* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), P.-A. Monard (4ème et M2 agreg à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), E. Monard (3ème à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée (Université Sorbonne Paris Nord), à Villetaneuse), H. Jallouli (Analyste Quantitatif à la Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (Attaché statisticien pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), C. Lemonnier (Prof de maths au Lycée Napoléon, à L'Aigle), M.-Y. Gueddari (Stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

**Solution du problème 15 :** Montrons que la puce ne peut pas se retrouver à son point de départ après un nombre impair $n$ de sauts. En argumentant par contradiction, supposons que les sauts $(x_i, y_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$ ramènent la puce à son point de départ. Soit $N$ le plus petit entier tels que les $2n$ nombres $a_i = Nx_i$ et $b_i = Ny_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ sont tous entiers. En particulier, les entiers $a_i, b_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ n'ont aucun facteur commun. Comme les sauts ramènent la puce à son point de départ, on a $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n b_i = 0$. En particulier, le nombre d'entiers impairs parmi les $a_i$ et $b_i$ est pair. D'autre part, comme chaque saut est de longueur 2, on a $a_i^2 + b_i^2 = N^2$ pour $i = 1, \ldots, n$. Montrons que $N$ est pair. Par contradiction, si $N$ était impair, exactement l'un des entiers $a_i$ ou $b_i$ est impair pour chaque $i$, de sorte qu'exactement $n$ parmi ces $2n$ entiers sont impair. Mais ceci contredit le fait que ce nombre d'impairs doit être pair. Puisque $N$ est pair, $a_i$ et $b_i$ doivent l'être aussi : le carré de tout impair est congru à 1 modulo 4, de sorte que $a_i^2 + b_i^2 \equiv 2 \pmod 4$ alors que $N^2 \equiv 0 \pmod 4$. Mais alors tous les entiers $a_i$ et $b_i$ ont un facteur 2 en commun, ce qui donne la contradiction souhaitée.

**Ont fourni une solution correcte :** A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), J. Scardigli (Tle au Lycée Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), P. Varnet (Tle au Lycée Henry-IV, à Paris), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), P.-A. Monard (4ème et M2 agreg à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), E. Monard (3ème à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée (Université Sorbonne Paris Nord), à Villetaneuse), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (Attaché statisticien pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), M.-Y. Gueddari (Stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

**Solution du problème 16 :** Montrons que toutes les affirmations de l'énoncé sont correctes.

Montrons d'abord que les points $H_1'$, $H_2'$, $H_3'$ et $H_4'$ sont sur un même cercle. Pour cela, il suffit de montrer que les angles $\widehat{H_1'H_2'H_3'}$ et $\widehat{H_3'H_4'H_1'}$ sont supplémentaires. Le quadrilatère $AH_1'HH_4'$ est inscriptible car $\widehat{AH_1'H}$ et $\widehat{HH_4'A}$ sont droits donc supplémentaires. Par conséquent, $\widehat{HH_4'H_1'} = \widehat{HAH_1'}$ et $\widehat{H_4'H_1'H} = \widehat{H_4'AH}$. On a 3 paires de relations similaires pour les 3 autres sommets du quadrilatère $ABCD$. On en déduit que $\widehat{H_1'H_2'H_3'} = \widehat{H_1'H_2'H} + \widehat{HH_2'H_3'} = \widehat{H_1'BH} + \widehat{HCH_3'} = \widehat{ABH} + \widehat{HCD}$ et que $\widehat{H_3'H_4'H_1'} = \widehat{H_3'H_4'H} + \widehat{HH_4'H_1'} = \widehat{H_3'DH} + \widehat{HAH_1'} = \widehat{CDH} + \widehat{HAB}$. Leur somme est donc $\widehat{H_1'H_2'H_3'} + \widehat{H_3'H_4'H_1'} = \widehat{ABH} + \widehat{HAB} + \widehat{HCD} + \widehat{CDH} = 2\pi - \widehat{BHA} - \widehat{DHC} = \pi$ comme souhaité, puisque les diagonales de $ABCD$ sont orthogonales. Soit $\mathcal{C}$ le cercle concernant les points $H_1'$, $H_2'$, $H_3'$ et $H_4'$.

Comme $H_1$ est extérieur au plan de la base contenant $\mathcal{C}$, il existe une unique sphère $\mathcal{S}$ contenant $H_1$ et $\mathcal{C}$. Montrons que $H_2$, $H_3$ et $H_4 \in \mathcal{S}$. Pour $i = 1, \ldots, 4$, les triangles $SHH_i'$ et $SH_iH$ sont semblables, de sorte que $|SH_i'| \cdot |SH_i| = \overrightarrow{SH_i'} \cdot \overrightarrow{SH_i} = |SH|^2$. Pour $i = 1$, cela signifie que la puissance de $S$ par rapport à $\mathcal{S}$ est $|SH|^2$. Pour $i = 2, 3, 4$, soit $P_i$ le deuxième point d'intersection de $SH_i'$ avec $\mathcal{S}$ (le premier étant $H_i'$), de sorte que

$\overrightarrow{SH'_i}\cdot\overrightarrow{SP_i} = |SH|^2$. On obtient donc $\overrightarrow{SH_i} = \overrightarrow{SP_i}$ de sorte que $H_i = P_i \in \mathcal{S}$ comme souhaité. Enfin, pour $i = 1, \ldots, 4$, le triangle $SH_iH$ étant rectangle en $H_i$, ce dernier appartient au cercle, donc à la sphère $\mathcal{S}'$, de diamètre $SH$. Les points $H_1$, $H_2$, $H_3$ et $H_4$ appartiennent donc à l'intersection des sphères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, qui est un cercle, donc contenu dans un plan.

**Ont fourni une solution correcte :** A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), J. de Sainte Marie (MP au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée (Université Sorbonne Paris Nord), à Villetaneuse), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (Attaché statisticien pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), M.-Y. Gueddari (stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

université PARIS-SACLAY
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
FMJH
cnrs