Marathon d'Orsay de Mathématiques

Mai 2016

Voici les solutions des derniers problèmes, avec les noms de ceux qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 10 : Notons $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ les différences des coordonnées des extrémités d'un segment de S. Parmi les plans orthogonaux à l'axe x, une bande de largeur $|\Delta x|$ intersecte ce segment. Donc parmi les plans orthogonaux à l'un des axes de coordonnées, des bandes de largeur totale $|\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$ intersectent ce segment. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz entre ce vecteur et les vecteurs $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, cette largeur totale est bornée supérieurement par $\sqrt{3}$ fois la longueur du segment. En sommant sur tous les segments de S, des bandes d'une largeur totale au plus $\sqrt{3} \times 2016$ parmi les plans orthogonaux à l'un des axes de coordonnées intersectent S. Mais tous les plans dans ces directions et à une distance inférieure à 582 de l'origine O forment 3 bandes de largeur 2×582 chacune, soit une largeur totale de $3492 > \sqrt{3} \times 2016 = 3491,44\ldots$ Il reste donc des plans disjoints de S et suffisamment proches de O.

A fourni une solution correcte : I. Konan (M2 AAG).

Solution du problème 11 : Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ qu'avec $2n + 1$ piquets et $2n+1$ chiens, on trouve au moins un piquet sans chien après la manœuvre. Pour $n = 1$, on a juste 3 piquets. Les chiens assis au pied des 2 piquets les plus proches vont simplement échanger leurs places, mais le 3ème chien va quitter son piquet qui restera sans chien. Si la propriété est vraie jusqu'à l'entier $n - 1$, montrons-la pour l'entier n. Toutes les distances entre piquets étant distincte, l'un d'entre elles est minimale. Les chiens correspondants vont simplement échanger leurs places. Si un autre chien vient s'ajouter près de l'un d'eux, il ne restera que $2n - 2$ chiens pour les $2n - 1$ piquets restants, et on trouve un piquet sans chien. Sinon, on peut ignorer les 2 chiens qui s'échangent pour se concentrer sur les $2n - 1$ piquets et chiens restants, qui se comportent comme si les autres piquets et chiens n'existaient pas. Mais alors, par l'hypothèse de récurrence, au moins l'un de ces $2n - 1$ piquets se retrouvera sans chien après la manœuvre. Pour $n = 5$, on obtient le résultat demandé.

Ont fourni une solution correcte : S. Filippas (L1 MPI), A. Goy (M1 MFA), C. Lemonnier (M1 MF), M. Flammarion (M1 MF + Hadamard) et I. Konan (M2 AAG).

Solution du problème 12 : Seule la valeur des numéros modulo 3 est importante ; il y a 3 cartes marquées d'un 0, 3 cartes marquées par -1 et 4 cartes portant un 1. Les sommes partielles doivent constamment alterner entre 1 et 2, puisqu'elles ne changent que de ± 1 à chaque nouvelle carte et ne peuvent passer par 0 ou 3. Comme la somme totale est 1, la première somme partielle doit aussi être 1. Il faut ensuite avoir les cartes non nulles dans l'ordre $-1, 1, -1, 1, -1, 1$. Les cartes nulles peuvent se placer n'importe où. On a donc 4 possibilités pour la première carte, puis 3! ordres possibles pour les autres cartes

1 et 3! ordres possibles pour les cartes -1. Il y a $\binom{9}{3}$ choix possibles d'emplacements pour les cartes 0, avec 3! ordres possibles pour celles-ci. On obtient la probabilité recherchée en multipliant ces possibilités et en divisant le tout par les 10! permutations possibles, et si la Force est avec vous, ceci donne

$$\frac{4 \times 3! \times 3! \times 9! \times 3!}{10! \times 6! \times 3!} = \frac{1}{50}.$$

Ont fourni une solution correcte : S. Filippas (L1 MPI), C. Lemonnier (M1 MF), M. Flammarion (M1 MF + Hadamard) et I. Konan (M2 AAG).

Voici le palmarès final du Marathon d'Orsay de Mathématiques.

<u>A résolu 12 problèmes :</u> I. Konan (M2 AAG).

<u>A résolu 8 problèmes :</u> M. Flammarion (M1 MF + Hadamard).

<u>Ont résolu 7 problèmes :</u> P. Frixons (L3 MFA), Q. Manière (L3 MFA + magist.) et C. Lemonnier (M1 MF).

<u>Ont résolu 6 problèmes :</u> S. Bourguignon (L1 MPI) et S. Filippas (L1 MPI).

<u>A résolu 5 problèmes :</u> C. Zhangchi (M1 MF + Hadamard).

<u>A résolu 4 problèmes :</u> P. Jiménez (L3 MFA + magist.).

<u>Ont résolu 3 problèmes :</u> A. Segovia (L3 MFA) et P. Le Couteur (M1 MF).

<u>Ont résolu 2 problèmes :</u> T. Buc-d'Alché (Terminale), M. Pierre (MPSI), N. Camps (L3 MFA), T. Stoskopf (L3 MFA), M. Brunet (M1 phys fonda + L3 MFA) et X. Xu (M2 AAG).

<u>Ont résolu 1 problème :</u> L. Escande (2nde), P. Azmiya (L3 MFA + magist.), M. Karbevski (L3 MFA + magist.), A. Goy (M1 MFA), H.-W. Zhang (M1 MF) et G. Chevallier (M1 MF + Hadamard).

Tous les participants listés ci-dessus sont cordialement invités à un drink et à la cérémonie de remise des diplômes et des prix, qui auront lieu le **mercredi 18 mai** à 12h15 à la salle de thé du bâtiment 425 (en quittant la cage d'escalier principale au premier étage, faire un demi-tour sur la gauche puis continuer tout droit). Tous les participants ayant résolu correctement au moins un problème recevront un diplôme et ceux qui ont résolu correctement au moins la moitié des problèmes recevront un petit prix.