Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la troisième vague de janvier 2023

Voici les solutions de la troisième vague de problèmes avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 9 : Soit N le nombre de cartes gagnées par Julien, et soient $n_1, \ldots, n_N$ les entiers figurant sur ces cartes. En argumentant par contradiction, quitte à réordonner les cartes, on peut supposer que $n_1 \neq n_2$. Notons r_i le nombre de points gaspillés si on achète du chocolat avec les $n_1 + \ldots + n_i$ points des i premières cartes. Alors chaque r_i est un entier entre 1 et N, puisqu'une tablette de chocolat vaut $N + 1$ points. De plus $r_i \neq r_j$ lorsque $i < j$ car sinon les $n_{i+1} + \ldots + n_j$ points des cartes $i+1$ à j permettraient d'acheter du chocolat sans gaspiller de points. Comme il y a N tels nombres r_i, l'ensemble de ces entiers coïncide avec l'ensemble de tous les entiers de 1 à N.
En particulier, l'entier n_2 est égal à l'un des entiers r_i puisque $3 \leq n_2 \leq 10 < N$. Si $i = 1$, cela implique que $n_1 = n_2$, contredisant notre hypothèse. Si $i = 2$, alors la première carte avec n_1 points permet d'acheter du chocolat sans gaspiller de points, une contradiction. Si $i \geq 3$, alors les i premières cartes sauf la deuxième, correspondant à $n_1 + n_3 + \ldots + n_i$ points, permettent d'acheter du chocolat sans gaspiller de points, une contradiction. Dans tous les cas, on a obtenu une contradiction, donc toutes les cartes doivent valoir le même nombre de points.

Ont fourni une solution correcte : N. Seillan (2nde au Lycée Hoche, à Versailles), P. Laurent-Levinson (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris), C. Hebey (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris), K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), N. Llorens (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor à la Cambridge University, à Cambridge).

Solution du problème 10 : Supposons pour commencer que $a > 0$. Remarquons que dans ce cas le membre de gauche $a + \frac{2023}{a}$ de la première équation est $\geq 2\sqrt{2023}$. En effet,

$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{\frac{2023}{a}})^2 = a + \frac{2023}{a} - 2\sqrt{2023}$. La première équation montre alors que $b \geq \sqrt{2023}$. En procédant de même avec les autres équations, on montre que $a, b, c, d \geq \sqrt{2023}$. En additionnant membre à membre les 4 équations, on obtient $2023(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}) = a + b + c + d$. Notre borne inférieure sur les inconnues montre que le membre de droite est $\geq 4\sqrt{2023}$. Mais elle montre aussi que le membre de gauche est $\leq 4\frac{2023}{\sqrt{2023}} = 4\sqrt{2023}$. Par conséquent, les deux membres doivent être égaux à $4\sqrt{2023}$, ce qui ne peut se produire que lorsque $a = b = c = d = \sqrt{2023}$.
Si $a < 0$, on multiplie toutes les équations membre à membre par -1 et on pose $a' = -a, b' = -b, c' = -c$ et $d' = -d$ pour obtenir les mêmes équations que dans le problème initial, mais avec les inconnues a', b', c' et d'. En raisonnant comme ci-dessus à partir de $a' > 0$, on trouve la seule autre solution $a = b = c = d = -\sqrt{2023}$. Les solutions sont donc $(\sqrt{2023}, \sqrt{2023}, \sqrt{2023}, \sqrt{2023})$ et $(-\sqrt{2023}, -\sqrt{2023}, -\sqrt{2023}, -\sqrt{2023})$.

Ont fourni une solution correcte : P. Laurent-Levinson (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris), B. Bala (Tle au Lycée Camille Claudel, à Pontault-Combault), R. Bonnet (Tle au Lycée Agora, à Puteaux), S. Defransure (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), L. Durnerin (Tle au Lycée Agora, à Puteaux), C. Hebey (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris), J. Hoarau (Tle au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), E. Vandenbroucke (Tle au Lycée Fénelon, à Grasse), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), N. Llorens (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Tardy (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Cayrol (2ème année à l'INSA du Centre Val de Loire, à Bourges), N. Gonde (2ème année BCPST au Lycée Saint-Louis, à Paris), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par P. Codron (2nde à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris) et T. Ravel (2nde à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par N. Afrakhte (MPSI au Lycée Condorcet, à Paris), R. Sommer (1ère au Lycée Condorcet, à Paris) et L. Toledano (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par L. Bouley (Tle au Cours Secondaire d'Orsay, à Orsay), J. Monteilhet (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois) et A. Waldek (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradenne (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par M. Couturier (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), S. Kort Saidi (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et L. Vuong-Thillerot (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor à la Cambridge University, à Cambridge), l'équipe formée par E. Monard (4ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (diplômé de l'ENS, à Issy-les-Moulineaux).

Solution du problème 11 : Commençons par montrer la propriété suivante, qui sera très utile : si les entiers $a, b > 0$ sont premiers entre eux, alors pour tout entier $N \geq ab$, il existe des entiers $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha a + \beta b = N$. En effet, parmi les a entiers strictement positifs $N, N-b, N-2b, \ldots, N-(a-1)b$ en progression arithmétique, l'un d'entre eux doit être un multiple strictement positif de a.
Avec des carrelages 29×31, on peut carreler des rectangles $(29 \cdot 31) \times 29$ et $(29 \cdot 31) \times 31$. Comme 29 et 31 sont premiers entre eux, on peut carreler des rectangles $(29 \cdot 31) \times n$ pour tout entier $n \geq N_1 = 29 \cdot 31$ avec des tels rectangles.
De même, avec des carrelages 30×32, on peut carreler des rectangles $(30 \cdot 32) \times 30$ et $(30 \cdot 32) \times 32$. Comme $\frac{30}{2}$ et $\frac{32}{2}$ sont premiers entre eux, avec de tels rectangles on peut carreler des rectangles $(30 \cdot 32) \times 2n$ pour tout entier pair $2n \geq N_2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 32$.
Comme $29 \cdot 31$ et $30 \cdot 32$ sont premiers entre eux, avec des rectangles $(29 \cdot 31) \times 2n$ et $(30 \cdot 32) \times 2n$ avec $2n \geq \max(N_1, N_2) = N_1$ on peut carreler des rectangles $m \times 2n$ avec $m \geq N_3 = 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32$.
Enfin, lorsque $m \geq N_3$ et $2n+1 \geq N_4 = 29 \cdot 31 + N_1$, un rectangle $m \times (2n+1)$ peut être subdivisé en un rectangle $m \times 29 \cdot 31$ et un rectangle $m \times 2k$ avec $2k \geq N_1$ et donc carrelé avec le stock de Valentin. Il en va donc de même pour tout rectangle $m \times n$ avec $m \geq N_3$ et $n \geq \max(N_1, N_4) = N_4$.

Ont fourni une solution correcte : S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor à la Cambridge University, à Cambridge).

Solution du problème 12 : Hercule peut bien disposer tous ses timbres sans recouvrement dans le cadre, en les disposant avec leurs côtés parallèles aux bords du cadre de la manière suivante. Il trie d'abord ses timbres par taille décroissante. Puis, en partant du coin inférieur gauche du cadre, il dispose les premiers timbres en une rangée contre le bord inférieur du cadre, en plaçant chaque timbre le plus à gauche possible, jusqu'à ce que le timbre suivant ne puisse plus tenir dans le cadre à droite du dernier timbre placé. Ensuite,

Hercule poursuit avec d'autres rangées de manière similaire, de sorte que dans chaque rangée tous les timbres ont leur côté inférieur à la même hauteur que le côté supérieur du premier timbre de la rangée précédente. Supposons qu'Hercule range tous ses timbres de cette manière en p rangées, quitte à déborder du bord supérieur du cadre.
Soit n_k le nombre de timbres dans la $k$ème rangée, et $\ell_{k,i}$ le côté du $i$ème timbre dans cette rangée, pour $i = 1, \dots, n_k$. Alors $\sum_{i=1}^{n_k} \ell_{k,i} \leq 10 < \ell_{k+1,1} + \sum_{i=1}^{n_k} \ell_{k,i}$ pour $1 \leq k \leq p-1$. Pour la dernière rangée p, on a simplement $\sum_{i=1}^{n_p} \ell_{p,i} \leq 10$. On sait aussi que $\sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_k} \ell_{k,i}^2 = 50$ et que $\ell_{k,i} \geq \ell_{k',i'}$ si $k' > k$ ou si $k = k'$ et $i' > i$. La hauteur totale occupée par les p rangées est $H = \sum_{i=1}^{p} \ell_{i,1}$. Nous devons montrer que $H \leq 10$.
Pour $1 \leq k \leq p-1$, on a $\ell_{k+1,1}^2 + \sum_{i=2}^{n_k} \ell_{k,i}^2 \geq \ell_{k+1,1}(\ell_{k+1,1} + \sum_{i=2}^{n_k} \ell_{k,i}) > \ell_{k+1,1}(10 - \ell_{k,1}) \geq \ell_{k+1,1}(10 - \ell_{1,1})$. En sommant toutes ces inégalités membre à membre pour $1 \leq k \leq p-1$, et comme $\sum_{i=2}^{n_p} \ell_{p,i}^2 \geq 0$, on obtient $50 - \ell_{1,1}^2 \geq (\sum_{k=1}^{p-1} \ell_{k+1,1})(10 - \ell_{1,1}) = (H - \ell_{1,1})(10 - \ell_{1,1})$.
Donc $H \leq \ell_{1,1} + \frac{50 - \ell_{1,1}^2}{10 - \ell_{1,1}} = 10 - 2\frac{(\ell_{1,1} - 5)^2}{10 - \ell_{1,1}} \leq 10$.

Ont fourni une solution correcte : S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris).