Marathon d'Orsay de Mathématiques

Janvier 2022

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **mardi 15 février 2022 à 18h** par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr`, par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email.

Problème 9 (semi et complet)

Afin de bien commencer la nouvelle année, Nina choisit un entier N strictement positif et étudie certaines de ses propriétés. Elle observe qu'il y a exactement 45 carrés parfaits strictement positifs parmi les entiers de $N - 2022$ à $N + 2022$ inclus.
Quelles sont toutes les valeurs possibles de l'entier N choisi par Nina ?

Problème 10 (semi et complet)

Mathis trace au tableau un grand cercle sur lequel sont répartis 40 points à distances égales. Il numérote ces points avec tous les entiers de 1 à 40, en attribuant des nombres distincts aux différents points suivant son humeur. Il défie ensuite Romane de relier ces points deux par deux en traçant 20 segments rectilignes disjoints dans le disque limité par le cercle, chaque point devant être atteint par exactement un segment. Un segment tracé entre des points numérotés par les entiers i et j rapportera $|i - j|$ points à Romane. Son score total est calculé en additionnant les points obtenus pour chaque segment tracé, à condition que les segments soient tous disjoints (pas de croisement autorisé entre deux segments).
Quelle stratégie doit utiliser Romane pour tracer ces segments afin de maximiser son score total, quel que soit le choix de numérotation effectué par Mathis ?

Problème 11 (complet)

On désigne par $\mathbb{N}_0$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Quelles sont toutes les fonctions $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ qui sont strictement croissantes, c'est-à-dire telles que $n < m$ implique $f(n) < f(m)$, et qui satisfont $f(f(n)) = 2n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$?

Problème 12 (complet)

Il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers divisant au moins l'un des entiers 2021^n avec n entier ≥ 1 (ce sont en effet 43 et 47). De même, il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers divisant au moins l'un des entiers 2022^n avec n entier ≥ 1 (ce sont en effet $2, 3$ et 337).

Mais peut-on trouver des entiers A et B strictement positifs de sorte qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers divisant au moins l'un des entiers $A \times 2021^n + B \times 2022^n$ avec n entier ≥ 1 ?