Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la deuxième vague de janvier 2018

Voici les solutions des problèmes précédents, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 5 : Un joueur qui annonce un nombre entre 1009 et 2017 sera gagnant, puisque son adversaire devra annoncer un nombre supérieur ou égal à 2018. Par conséquent, si un joueur annonce un nombre supérieur à $\frac{1009}{4}$ (donc au moins égal à 253) mais au plus égal à 1008, il sera perdant car son adversaire pourra annoncer un nombre entre 1009 et 2017. On en déduit qu'un joueur qui annonce un nombre entre $\frac{253}{2}$ (donc au moins égal à 127) et 252 sera gagnant, puisque son adversaire devra annoncer un nombre supérieur ou égal à 253, mais ne dépassant pas 508 (ni donc 1008). En poursuivant de même, on voit que jouer entre 32 (arrondi supérieur de $\frac{127}{4}$) et 126 mène à la défaite, jouer entre 16 et 31 mène à la victoire, et jouer entre 4 et 15 mène à la défaite. Comme Luke annonce le nombre 8 dans cet intervalle, il perdra et Rey sera le dernier Jedi.

Ont fourni une solution correcte : C. Lamy (2nde au Lycée Einstein, Sainte Geneviève des Bois), N. Déhais (1ère S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), P. Lafitte (1ère S au Lycée Fustel de Coulanges, Massy), T. Laurenceau-Frugier (1ère S au Lycée François-Joseph Talma, Brunoy), M. Coué (Tle S au Lycée Descartes, Antony), N. Dias (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), L. Fliche (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), B. Gonin (Tle S au Lycée Descartes, Antony), R. Moyeuvre (Tle S au Lycée Gaspard Monge, Savigny-sur-Orge), B. Nguyen (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), E. Vafiades (Tle S au Lycée Frédéric Mistral, Fresnes), M. Biroli (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), A. Pacco (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), K. Lefki (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), D. Mavaleix-Marchessoux (doctorant à l'ENSTA ParisTech, Palaiseau), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin).

Solution du problème 6 : Appelons k le nombre de secteurs dont il faut avancer (dans le sens où on lit successivement 11, puis 4, puis 17 sur la roue) pour passer d'un secteur à celui qui est marqué du numéro suivant. Remarquons que k et n sont premiers entre eux, car sinon en partant du secteur 1 on retomberait sur un secteur déjà numéroté avant d'atteindre le secteur n. Partant du secteur 4, pour aboutir au secteur 17, il faut avoir avancé de k secteurs 13 fois, plus un multiple de n fois, c'est-à-dire $13 + an$ fois pour un certain entier a. De même, partant de 11, pour aboutir au secteur 4, il faut avoir avancé de k secteurs $-7+bn$ fois, pour un certain entier b. Dans les deux cas, on s'est retrouvés (après un certain nombre de tours complets de la roue) sur le secteur immédiatement suivant le secteur de départ. Par conséquent, $(13 + an)k$ et $(-7 + bn)k$ diffèrent par un multiple de n. Ceci implique que $20k$ est un multiple de n, ou encore que n divise 20 (car n et k sont premiers entre eux). Mais comme $n \geq 17$ puisqu'un secteur porte ce numéro, on en déduit que $n = 20$.
Plusieurs participants ont également fourni la numérotation de l'ensemble de la roue (même si cela n'était pas nécessaire pour trouver la solution de manière justifiée) : 17, 4, 11, 18, 5, 12, 19, 6, 13, 20, 7, 14, 1, 8, 15, 2, 9, 16, 3, 10.

Ont fourni une solution correcte : A. Berached (3ème au Collège Ile de France, Villebon-sur-Yvette), C. Lamy (2nde au Lycée Einstein, Sainte Geneviève des Bois), N. Déhais (1ère S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), T. Laurenceau-Frugier (1ère S au Lycée François-Joseph Talma, Brunoy), G. Chilla (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), M. Coué (Tle S au Lycée Descartes, Antony), N. Dias (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), L. Fliche (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), B. Gonin (Tle S au Lycée Descartes, Antony), M. Biroli (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), A. Pacco (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), K. Lefki (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée). D. Mavaleix-Marchessoux (doctorant à l'ENSTA ParisTech, Palaiseau), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin).

Solution du problème 7 : Soit $d = AH$, alors $d_1 = AH$ tandis que d_2 et d_3 contiennent comme AH le point A qui est fixé par les symétries orthogonales d'axes AC et AB. Donc les droites d_1, d_2 et d_3 sont concourantes en A.
Remarquons ensuite que le point H_1 image de H par la symétrie orthogonale d'axe BC se trouve sur le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. En effet, $\widehat{BCH}$ et $\widehat{ABC}$ sont complémentaires, de même que $\widehat{CBH}$ et $\widehat{BCA}$. Donc $\widehat{BH_1C} = \widehat{CHB}$ est supplémentaire de $\widehat{BCH} + \widehat{CBH}$, qui est lui même supplémentaire de $\widehat{ABC} + \widehat{BCA}$. Donc $\widehat{BH_1C}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires, de sorte que le quadrilatère ABH_1C est inscriptible, dans un cercle qui doit être $\mathcal{C}$. De même, les images H_2 et H_3 de H par les symétries orthogonales d'axes AC et AB sont sur $\mathcal{C}$.
Soit maintenant d' une droite passant par H. Soit $i = 1, 2$ ou 3. La droite d'_i passe par H_i et recoupe $\mathcal{C}$ en un deuxième point P_i. Si les droites $d = AH$ et d' font un angle φ en H, alors les droites d_i et d'_i font un angle $-\varphi$ en H_i. En d'autres termes, l'arc AP_i sur $\mathcal{C}$ est vu sous un angle $-\varphi$ depuis le point H_i, donc depuis tout point de $\mathcal{C}$. On en déduit que $P_1 = P_2 = P_3$ pour tout angle φ, de sorte que les droites d'_1, d'_2 et d'_3 sont concourantes quelle que soit la droite d' passant par H.

Ont fourni une solution correcte : M. Biroli (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), A. Pacco (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée).

Solution du problème 8 : Remarquons que $(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y})^2 \geq 0$. En développant, on obtient $\frac{x^2}{(y-z)^2} + \frac{y^2}{(z-x)^2} + \frac{z^2}{(x-y)^2} \geq -2(\frac{xy}{(y-z)(z-x)} + \frac{yz}{(z-x)(x-y)} + \frac{zx}{(x-y)(y-z)})$. En mettant la parenthèse du membre de droite au même dénominateur $(y-z)(z-x)(x-y)$, on obtient le numérateur $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = xy(x-y) + y^2z - yz^2 + xz^2 - x^2z = (x-y)(xy - (x+y)z + z^2) = (x-y)(x-z)(y-z)$. Le membre de droite de l'inégalité est donc égal à 2, de sorte que l'expression de l'énoncé est supérieure ou égale à 2. L'égalité se produit lorsque $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$, donc notamment lorsque $x = 0$, $y = 1$ et $z = -1$.

Ont fourni une solution correcte : M. Biroli (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), A. Pacco (L1 à l'Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), L. Hahn (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée).