Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la troisième vague de février 2020

Voici les solutions de la troisième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 9 : Montrons que Rey et Ben peuvent toujours convenir d'une stratégie commune afin de l'emporter. Ensemble, Rey et Ben peuvent retirer 2, 3 ou 4 blocs à chaque tour. Ils peuvent donc convenir de retirer ensemble le bon nombre de blocs pour que le nombre total de blocs diminue de 5 à chaque tour. En effet, comme Palpatine peut retirer 1, 2 ou 3 blocs, il s'agit pour eux d'en retirer 4, 3 ou 2. Ainsi, après 28 tours, il restera exactement 4 blocs, ce qui ne permettra pas à Palpatine de tous les retirer. En revanche, après qu'il ait joué, il en restera 1, 2 ou 3. Dans les deux premiers cas, Rey peut obtenir le dernier bloc et dans le deuxième cas, Rey retire 2 blocs et Ben obtient le dernier.

Ont fourni une solution correcte : R. et A. Crovisier (5ème au Collège La Fontaine, à Antony et 2nde au Lycée Lakanal, à Sceaux), M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Jiao (1ère à l'Institut Notre-Dame, à Meudon), S. Meziane (1ère SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Misguich (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Polderman (1ère au Lycée Saint-Jean Hulst, à Versailles), F. Azavant (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), G. Magnant (Tle S à l'Institut Notre Dame, à Bourg-la-Reine), A. Plessias (Tle S à l'Institut Notre Dame, à Bourg-la-Reine), C. Rolland (Tle S au Lycée Louis Bascan, à Rambouillet), R. Weidle (Tle S au Lycée Michelet , à Vanves), M. Baccara (MPSI au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), J. de Sainte Marie (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), L. Vuduc (M2 MSV à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), H. Jallouli (Analyste quantitatif à la Deutsche Bank), N. San Agustin (Développeur informatique embarquée chez ABMI, au Mans).

Solution du problème 10 : Montrons que la tribu ne peut pas compter plus de 1010 conformistes. Au fur et à mesure que les membres de la tribu répondent, considérons la différence en valeur absolue entre le nombre de "oui" et le nombre de "non" enregistrés jusque là (sans compter la réponse du chef). Au début, il n'y a pas de réponses enregistrées donc cette différence est nulle. A la fin, cette différence vaut $|1010 - 1010| = 0$ également. D'autre part, la réponse de chaque conformiste fait augmenter de 1 cette différence en valeur absolue, puisqu'un tel membre se rallie à la majorité jusque là. Tout autre membre ne peut faire varier cette quantité que de $+1$ ou de -1. Donc pour partir de 0 et revenir à 0 en 2020 étapes, ce nombre ne peut augmenter plus de 1010 fois, et il ne peut y avoir plus de conformistes que cela.
D'autre part, il est possible d'avoir une tribu de 1010 conformistes et de 1010 menteurs, par exemple si les conformistes répondent tous avant les menteurs : ils répondront "oui" comme le chef, puis les menteurs répondront "non". Il peut donc y avoir au maximum 1010 conformistes dans cette tribu.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), A. Plessias (Tle S à l'Institut Notre Dame, à Bourg-la-Reine), J. de Sainte Marie (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), H. Jallouli (Analyste quantitatif à la Deutsche Bank).

Solution du problème 11 : Montrons qu'une stratégie permettant d'obtenir le plus grand score possible est de choisir à chaque tour le plus petit nombre non rayé puis le plus grand nombre non rayé. Si on note a_i le premier nombre lu au tour i et b_i le deuxième nombre lu au tour i, alors pour maximiser son score il faut avoir $a_i \leq b_i$. En effet, le coefficient multiplicateur au tour i est $a_i + 2b_i$. Si on avait $a_i > b_i$, échanger ces nombres permettrait d'augmenter ce coefficient puisque $2a_i + b_i > a_i + 2b_i$ dans ce cas.
D'autre part, si pour $i \neq j$ on a $a_i < a_j$, alors pour maximiser son score il faut avoir $b_j \leq b_i$. En effet, le coefficient multiplicateur pour les tours i et j est $(a_i + 2b_i)(a_j + 2b_j)$. Si on avait $b_i < b_j$, échanger ces nombres permettrait d'augmenter ce coefficient puisque $(a_i+2b_i)(a_j+2b_j) < (a_i+2b_j)(a_j+2b_i)$ dans ce cas. Après quelques manipulations, cette inégalité est en effet équivalente à $(b_i - b_j)(a_j - a_i) < 0$.
En renumérotant les tours (ce qui ne modifie pas le score obtenu), on peut aussi supposer que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{25}$. Si toutes ces conditions précédentes sont satisfaites (ce qui est nécessaire pour avoir le score maximal) alors on a $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{25} \leq b_{25} \leq b_{24} \leq \ldots \leq b_1$, ce qui correspond à la stratégie annoncée. Comme cette manière de faire est unique, elle correspond bien à un score maximal.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Misguich (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle).

Solution du problème 12 : Les 7 cercles décrits dans l'énoncé du problème ont bien toujours un point en commun ; notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à XYZ.
Soit H l'orthocentre du triangle XYZ, et notons H_1, H_2 et H_3 les points symétriques de H par rapport aux côtés YZ, ZX et XY. Alors $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{C}$. Montrons-le pour H_1 : $\widehat{YH_1Z} = \pi - \widehat{H_1YZ} - \widehat{H_1ZY} = \pi - \widehat{HYZ} - \widehat{HZY} = \pi - (\frac{\pi}{2} - \widehat{XZY}) - (\frac{\pi}{2} - \widehat{XYZ}) = \widehat{XZY} + \widehat{XYZ} = \pi - \widehat{YXZ}$, de sorte que H_1YXZ est inscriptible. La preuve est similaire pour H_2 et H_3.
Comme les côtés de XYZ sont de longueurs toutes différentes, les points B, C et H sont deux à deux distincts et non alignés avec X, Y ou Z. Il est bien connu que les points B, C et H sont alignés (c'est la fameuse droite d'Euler du triangle XYZ). Il en va donc de même pour B_i, C_i et H_i, avec $i = 1, 2, 3$. Le triangle XYZ étant acutangle, H est à l'intérieur du triangle, de sorte que les points H_1, H_2 et H_3 sont deux à deux séparés par des sommets de XYZ sur $\mathcal{C}$. Par conséquent, exactement deux des droites $B_iC_iH_i$ intersectent $\mathcal{C}$ en des points séparés par un de ses sommets ; on peut supposer qu'il s'agit de $B_1C_1H_1$ et $B_2C_2H_2$.
La composée des symétries d'axes YZ et ZX est la rotation de centre Z et d'angle $2\widehat{YZX}$. Elle envoie B_1 sur B_2, C_1 sur C_2 et H_1 sur H_2. Soit S l'intersection des droites $B_1C_1H_1$ et $B_2C_2H_2$. Comme ces droites forment un angle $2\widehat{YZX}$ entre elles, on a $\widehat{B_1SB_2} = \widehat{B_1ZB_2}$, $\widehat{C_1SC_2} = \widehat{C_1ZC_2}$ et $\widehat{H_1SH_2} = \widehat{H_1ZH_2}$. Ces égalités montrent que S appartient respectivement aux cercles circonscrits aux triangles B_1ZB_2, C_1ZC_2 et H_1ZH_2. Le dernier de ces cercles n'est autre que $\mathcal{C}$, puisque H_1 et H_2 en font partie.
Il reste à montrer que S appartient aux 4 autres cercles décrits dans l'énoncé du problème.

Le même argument que ci-dessus montre que le point S' d'intersection des droites $B_1C_1H_1$ et $B_3C_3H_3$ appartient aux cercles circonscrits aux triangles B_1YB_3, C_1YC_3 et XYZ. Mais la droite $B_1C_1H_1$ intersecte $\mathcal{C}$ en les points distincts S et H_1 d'une part, et en les points distincts S' et H_1 d'autre part. Donc $S = S'$ appartient à 5 des cercles décrits dans l'énoncé du problème, et on obtient les deux derniers en argumentant de même avec les droites $B_2C_2H_2$ et $B_3C_3H_3$ puis l'intersection de $B_2C_2H_2$ avec $\mathcal{C}$.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris).