Marathon d'Orsay de Mathématiques

Avril 2016

Les problèmes plus ardus de l'étape précédente ont permis de départager la plupart des participants. Pour la dernière étape et le sprint final, attaquez-vous aux 3 problèmes plus accessibles ci-dessous pour maximiser votre score !
Vos solutions sont attendues au plus tard le **lundi 2 mai 2016 à 14h**, par courrier électronique à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou dans la boîte en carton au rez-de-chaussée du bâtiment 425.

Problème 10

Dans l'espace euclidien à 3 dimensions, on considère un point O et un ensemble S de points de l'espace formé par des segments dont la somme des longueurs est 2016. Démontrer qu'il existe un plan disjoint de S et dont la distance à O est inférieure à 582.

Problème 11

Onze piquets sont plantés sur une pelouse de sorte que les distances entre ceux-ci soient toutes distinctes. Au pied de chaque piquet est assis exactement un chien savant. Au signal du dresseur, chaque chien va s'asseoir sous un autre piquet, le plus proche de son piquet de départ. Démontrer qu'après cette manœuvre, au moins un des piquets se retrouve sans chien.

Problème 12

Rey donne à Finn des cartes numérotées de 1 à 10 dans un ordre aléatoire (chaque permutation est équiprobable). Chaque fois que Rey donne une carte, Finn calcule la somme des numéros sur les cartes reçues jusque là. Quelle est la probabilité qu'aucune des sommes calculées par Finn ne soit un multiple de 3 ?

Voici les solutions des problèmes précédents, avec les noms de ceux qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 7 : Pour le $i$ème coureur mathématicien, notons v_i sa vitesse sur sentiers boueux, w_i sa vitesse sur route asphaltée et t_i l'instant de son départ. Alors il aura parcouru une distance x sur sentiers boueux et une distance y sur route asphaltée à l'instant $t = \frac{x}{v_i} + \frac{y}{w_i} + t_i$. On obtient ainsi 10 plans non verticaux dans l'espace de coordonnées

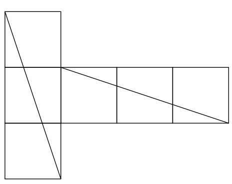
(x,y,t), qui s'intersectent en au plus $\binom{10}{2} = 45$ droites non verticales, se projetant le long de l'axe t en au plus 45 droites du plan de coordonnées (x,y), représentant les dépassements des coureurs. Le circuit du Marathon est représenté dans ce plan par un chemin joignant l'origine à un point à coordonnées positives par une succession de segments parallèles aux axes. Comme le plan tout entier, ce chemin est découpé par les (au plus) 45 droites en au plus $1+1+2+\ldots+45 = 1036$ régions. Au sein d'une région, il n'y pas de dépassements donc plusieurs spectateurs y verront passer les mathématiciens dans le même ordre. Même en plaçant 2 spectateurs dans chacune des (au plus) 1036 régions, il reste (au moins) $2500 - 2 * 1036 = 428$ spectateurs à placer, donc (au moins) l'une des régions en contient au moins 3.

Ont fourni une solution correcte : P. Frixons (L3 MFA) et I. Konan (M2 AAG).

Solution du problème 8 : Représentons l'équation $f(xf(y)+y) = yf(x)+f(y)$ de l'énoncé par $P(x,y)$. Alors $P(0,1)$ implique que $f(0) = 0$. Si $f(1) \neq 1$, alors $P(\frac{1}{1-f(1)}, 1)$ implique que $f(1) = 0$. Mais alors $P(x,1)$ implique que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction nulle est bien une solution ; pour chercher les autres on peut supposer que $f(1) = 1$. Alors $P(x,1)$ donne $f(x+1) = f(x)+1$ et donc f est l'identité sur les entiers. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $P(x-1,n)$ implique alors $f(nx) = nf(x)$ de sorte que f est l'identité sur les rationnels. Si a est une racine de f alors $P(1,a)$ donne $a = 0$. Pour $y \neq 0$, $P(\frac{x-y}{f(y)}, y)$ donne $f(x) = f(y)+yf(\frac{x-y}{f(y)})$. En y remplaçant x par $x+f(y)$, le membre de droite augmente de y, donc $f(x+f(y)) = f(x)+y$, ce que nous noterons $Q(x,y)$. Alors $Q(0,y)$ donne $f(f(y)) = y$, ce qui avec $Q(x,f(y))$ implique $f(x+y) = f(x)+f(y)$. L'additivité de f appliquée à $P(x,y)$ donne $f(xf(y)) = yf(x)$. En posant $z = f(y)$ on obtient $f(xz) = f(x)f(z)$. En particulier $f(x^2) = f(x)^2$ et f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f est additive, elle est donc strictement croissante. Comme f est l'identité sur $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$, c'est donc aussi l'identité sur $\mathbb{R}$. En conclusion, les seules solutions sont la fonction nulle et l'identité.

Ont fourni une solution correcte : S. Filippas (L1 MPI) et I. Konan (M2 AAG).

Solution du problème 9 : En développant le cube sur le plan, on voit que les triangles doivent couvrir un secteur angulaire de $\frac{3\pi}{2}$ autour de chaque sommet. Donc un sommet du cube ne peut être recouvert par un point intérieur d'un triangle (qui couvrirait un secteur angulaire de $2\pi > \frac{3\pi}{2}$). De même, au plus un côté de triangle peut passer par un sommet, puisque chaque côté couvre un angle π. Si un côté de triangle passe par un sommet, il reste un angle de $\frac{\pi}{2}$ à couvrir par plusieurs sommets de triangles, pour lesquels la somme des angles vaut $\frac{\pi}{2}$. Si aucun côté de triangle ne passe par un sommet, celui-ci est couvert par plusieurs sommets de triangles, pour lesquels la somme des angles vaut $\frac{3\pi}{2}$. Dans tous les cas, chaque sommet du cube nécessite des angles de triangles dont la somme vaut au moins $\frac{\pi}{2}$. Pour les 8 sommets du cube, cela donne 4π. La somme des angles d'un triangle valant π, un tel recouvrement nécessite au moins 4 triangles. Inversement, on peut construire un recouvrement des faces du cube par 4 triangles, au moyen du développement du cube ci-dessous, et en scindant chacun des 2 rectangles 1×3 en deux triangles par une diagonale.



Ont fourni une solution correcte : Q. Manière (L3 MFA + magist.), C. Lemonnier (M1 MF), M. Flammarion (M1 MF + magist.) et I. Konan (M2 AAG).