Marathon d'Orsay de Mathématiques

Avril 2017

Voici les 3 derniers problèmes, dont les solutions sont attendues au plus tard le **vendredi 28 avril 2017 à 14h**, via `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou la boîte en carton au rez-de-chaussée du bâtiment 425.

Lancez-vous dans ce sprint final pour maximiser votre score, les problèmes ci-dessous sont accessibles à tous les participants !

Problème 10

Jacques a dit : "Pour tout entier $n \geq 2$, on peut trouver $2n$ entiers $c_1, \ldots, c_{2n}$ deux à deux distincts tels que $c_1^2 + \ldots + c_n^2 = c_{n+1}^2 + \ldots + c_{2n}^2$". Jacques a-t-il tort ou raison ?

Problème 11

Quel est le plus grand nombre de plans distincts dans l'espace à trois dimensions, pour lesquels on peut trouver six points tels que chacun de ces plans en contienne au moins quatre, mais qu'aucune droite de l'espace n'en contienne quatre ?

Problème 12

Rey doit gravir un immense escalier pour rejoindre Luke. A priori, elle pourrait soit marcher, soit trottiner, ce qui la ferait progresser deux fois plus vite qu'en marchant, soit faire des bonds de plusieurs marches, ce qui la ferait progresser trois fois plus vite qu'en marchant. Hélas, Rey n'est pas encore assez entraînée dans la Force que pour pouvoir tenir la distance aux deux allures les plus rapides et elle doit donc marcher. Depuis le début de son ascension, Rey imagine deux copies d'elle-même, l'une trottinant, l'autre bondissant, effectuant des allers-retours entre le sommet de l'escalier et elle-même qui progresse plus lentement dans l'escalier. Au moment où sa copie trottinante l'aurait rejointe pour la cinquième fois, Rey a gravi tout juste 211 marches depuis le moment où sa copie bondissante l'aurait rejointe pour la cinquième fois. Combien de marches compte cet escalier ?

Voici les solutions des problèmes précédents, avec les noms de ceux qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 7 : Soient A, B, C trois des six points considérés. Supposons que $\widehat{ABC} \geq \frac{2\pi}{3}$. Alors $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC| \cos \widehat{ABC} \geq |AB|^2 + |BC|^2 +$

$|AB||BC| \geq 3\min(|AB|,|BC|)^2$ de sorte que que $L/\ell \geq \sqrt{3}$. Il suffit donc de trouver un angle $\geq \frac{2\pi}{3}$. Supposons que l'enveloppe convexe des six points considérés soit un hexagone. Comme la somme des angles d'un hexagone vaut $4\pi = 6 \cdot \frac{2\pi}{3}$, au moins l'un de ses angles est $\geq \frac{2\pi}{3}$. Sinon, au moins l'un des six points, disons P, est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des six points considérés, il est dans le triangle (fermé) formé par trois autres des six points, disons A, B, C. Mais alors l'un des trois angles $\widehat{APB}, \widehat{BPC}$ ou $\widehat{CPA}$ est $\geq \frac{2\pi}{3}$.

Ont fourni une solution correcte : M. Andrieu & L. Vivion (M2 math discr. à Marseille et M2 math fonda à Nice) et I. Konan (M2 optimisation).

Solution du problème 8 : Remarquons qu'un sincère ne peut jamais se trouver juste devant un menteur dans la queue, car chacun a devant lui le même nombre de menteurs et derrière lui le même nombre de sincères. Par conséquent, la queue est composée de x menteurs suivis par $2017 - x$ sincères. Le dernier menteur a $x - 1$ menteurs devant lui et $2017 - x$ sincères derrière lui, de sorte que $x - 1 \leq 2017 - x$ ou encore $x \leq 1009$. Le premier sincère a x menteurs devant lui et $2016 - x$ sincères derrière lui, de sorte que $x > 2016 - x$ ou encore $x > 1008$. La queue est donc composée de $x = 1009$ menteurs de suivis de 1008 sincères.

Ont fourni une solution correcte : L. Hahn (L1 MPI), M. Andrieu & L. Vivion (M2 math discr. à Marseille et M2 math fonda à Nice), C. Lemonnier (M2 agrégation) et I. Konan (M2 optimisation).

Solution du problème 9 : En binaire, les opérations possibles consistent à supprimer le chiffre de droite ou à ajouter 01 à droite du nombre. En combinant ces opérations, on peut aussi ajouter 0 à droite du nombre. Par conséquent, les nombres en binaire que l'on peut obtenir en partant de 0 sont exactement ceux qui n'ont pas deux chiffres 1 consécutifs. Le plus grand tel nombre qui est < 2017 a 11 chiffres car $2^{11} = 2048$. Le plus grand d'entre eux s'écrit 10101010101 en binaire, et contient 6 chiffres 1. Pour atteindre ces nombres, on peut ne passer que par des nombres à au plus 12 chiffres, qui commencent par 10 en binaire, et sont donc inférieurs à $2^{11} + 2^{10} = 3072 < 5000$, donc tous ces nombres peuvent être obtenus. Comptons les nombres de ce type avec k chiffres 1. Avec 11 chiffres au total (on peut commencer à gauche par des zéros), il reste $11 - k$ chiffres 0 et il faut placer les k chiffres 1 parmi les $12 - k$ positions possibles autour des zéros. Il y a donc $\binom{12-k}{k}$ possibilités. Au total, il y a ainsi $\sum_{k=0}^{6} \binom{12-k}{k} = 233$ nombres que Cassian et Jyn peuvent obtenir. Ceci donne lieu à une probabilité de succès égale à $233/2018 \cong 0,11546\ldots$ assez faible, mais c'est compter sans la Force !

A fourni une solution correcte : I. Konan (M2 optimisation).