Explique-moi... La théorie de Morse

Introduction et motivations.

- Présentation. Cyril Falcon
cyril.falcon@math.u-psud.fr
www.math.u-psud.fr/~falcon
↳ textes d'initiation à mes recherches
↳ notes de l'exposé (ou sur Explique-moi...)

1ère année de doctorat, LMO
Équipe Topologie et Dynamique
Directeur : Frédéric Bourgeois

Scolarité. Comme beaucoup d'entres vous : 2 années de CPGE MPSI-MP (à Bordeaux)
↳ je ne me voyais pas en école d'ingénieur

⇒ L3 - M2 AAG + magistère à l'Université Paris-Sud.

Entre M1 et M2 : agrégation
↳ je vous encourage à la préparer !
- Permet de prendre du recul sur vos connaissances et à les consolider,
- Permet d'aborder plus sereinement le M2 et le doctorat,
- Aussi une manière d'assurer votre avenir professionnel.

Sujet de l'exposé. Théorie de Morse, les fondements
↳ reconstruction de la topologie d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ à partir d'une fonction $f : S \to \mathbb{R}$ générique
↳ explorer le lien points critiques $\rightleftharpoons$ topologie

Tout ce que je raconte s'étend aux variétés différentielles compactes sans bord sans plus de travail, mais on va garder un cadre simple et visuel.

Références. Pour de belles illustrations et des vidéos instructives : Analysis Situs - La théorie de Morse
analysis.situs.math.cnrs/-La-theorie-de-Morse.html

Pour la formalisation de la théorie : J. Milnor, Morse theory. Princeton University Press, 1963.

Pour aller plus loin : M. Audin et M. Damian, Théorie de Morse et homologie de Floer. EDP Sciences, 2010.

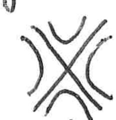
Exemple introductif. Cartes topographiques.

Sur une carte topographique le relief est représenté en traçant les lignes d'altitude constante.

3 types de lignes de niveaux :
3 types de points


générique

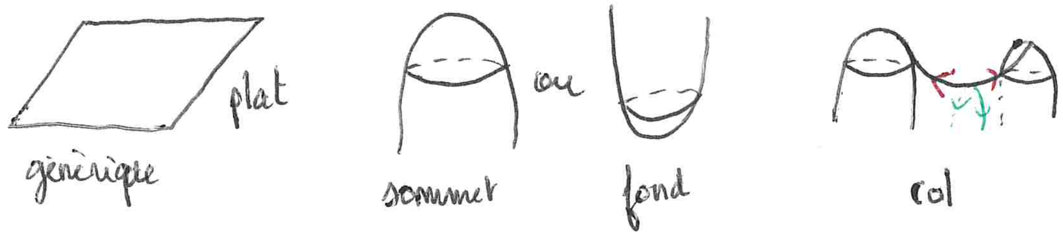

sommet / fond


col

(point le plus bas entre deux sommets)

∃ directions faisant croître/décroître l'altitude

Au voisinage de ces points, le paysage ressemble à :



$\Rightarrow$ En étudiant les lignes d'altitude constante, on reconstruit le relief du paysage.

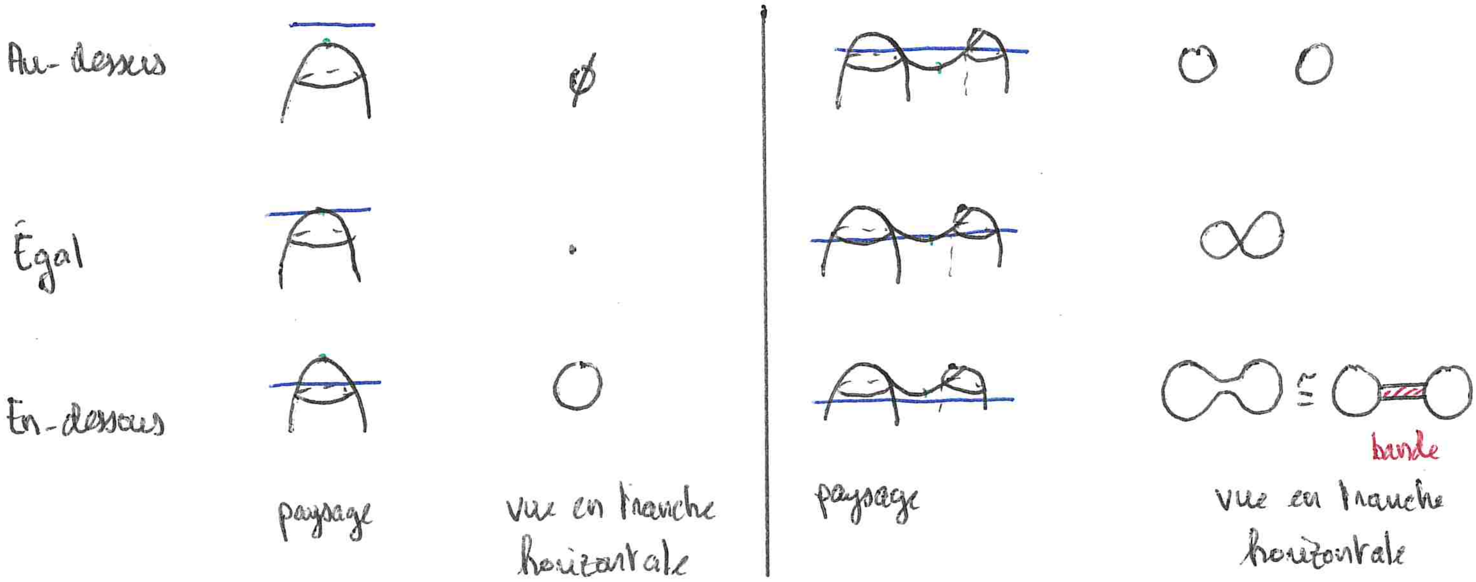
Imaginons que l'on inonde le paysage et que l'on représente le relief du paysage émergé.

On draine progressivement l'eau et on observe que :

- lorsque le niveau passe juste en-dessous d'un sommet : apparition d'une nouvelle composante connexe dans la carte (ajout d'un disque),
- lorsque le niveau passe juste en-dessous d'un col : deux composantes connexes déjà existantes dans la carte fusionnent (ajout d'une bande entre deux disques).

Illustration. · point remarquable

— niveau de l'eau



On vient de décrire le théorème d'évolution de la topologie des sous-niveaux / niveaux

expliquer la reconstruction.

Philosophie. Les points critiques de $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ contiennent de l'information sur la topologie de S.

Motivation. Classification des surfaces.

Quelles sont les différentes surfaces à difféomorphisme (déformation) / homéomorphisme près ?

↳ Les construire et les distinguer.

↳ Trouver un invariant algébrique : $\chi(S) \neq \chi(S') \Rightarrow S \not\cong S'$.

Pourquoi vous parler de théorie de Morse ?

- René Thom (1923-2002) : théorie de Morse est inclassable
  français
  elle exploite de nombreux domaines des mathématiques
  ↳ analyse : EDO, analyse fonctionnelle
  ↳ topologie différentielle locale : singularités, calcul différentiel
  ↳ topologie globale
- Raoul Bott (1923-2005) : théorie de Morse est indomptable
  hongrois
  elle réserve toujours des surprises
- Nombreuses applications :
  - Recherche de géodésiques sur une variété riemannienne
    ↳ généralise les droites
    chemin qui ne change pas d'angle
    Ex. 

    Fonction : $E : \Omega(M) \to \mathbb{R}$ [exemple historique]
    $$\gamma \mapsto \frac{1}{2}\int |\dot\gamma(t)|^2 dt$$
    Marston Morse (1892-1977)
    américain
  - Invariants algébriques en géométrie symplectique.
    Homologies de Floer (symplectique, lagrangienne, ...)
    ↳ application aux conjectures d'Arnol'd
    ↳ Vladimir Arnol'd (1937-2010)
    russe

    Fonction : $\mathcal{A}_H : \Omega(W) \to \mathbb{R}$ $(\partial M = W)$
    $$\gamma \mapsto \int \gamma^*\lambda - dH(\theta, \gamma(\theta))d\theta$$
    Points critiques : orbites de X_H (champ hamiltonien).

    Andreas Floer (1956-1991)
    allemand
  - Invariants algébriques en topologie de contact
    Homologie pour les familles génératrices
    Fonction : $S : M \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
    $$(u,v,w) \mapsto f(u,v) - f(u,w)$$
    Points critiques : legendrienne et cordes de Reeb
    ↳ c'est ce qui m'occupe pendant mon doctorat
- Beaucoup d'idées que vous avez vues ou allez voir en cours.

1. Rappels de calcul différentiel

1.1. Surface

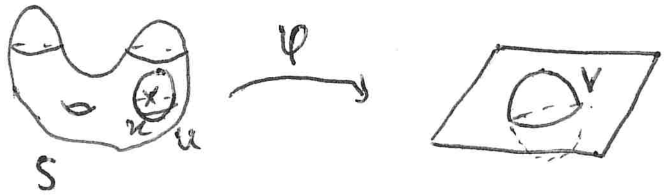
Déf. $S \subset \mathbb{R}^3$ surface :

- sous-variété de codimension 1 de $\mathbb{R}^3$
  4 définitions équivalentes (par le théorème d'inversion locale) que vous connaissez.

  Rappel de la version la plus géométrique :

  $$\forall x \in S, \exists U \in \mathcal{V}_x(\mathbb{R}^3), \exists \varphi : U \underset{\text{difféomorphisme (déformation)}}{\xrightarrow{\sim}} V \in \mathcal{V}_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^3) \text{ tq } \varphi(S \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$$

  [redressement : ressemble localement à un morceaux de plan]



- compacte (ne part pas à l'infini)
- connexe (en un seul morceaux)
- orientable : On ne peut pas plonger de ruban de Möbius dans S.

  Dans S, on ne voit pas ce dessin :  $[0,1]^2 / (x,0) \sim (1-x,1)$

  On prend une bande de papiers et on recolle les deux extrémités après avoir fait un demi-tour.

Ex.

...

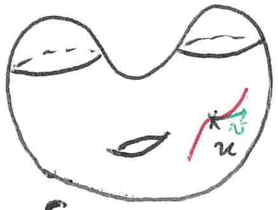
Contre-ex. $\mathbb{RP}^2$ (pour ceux qui connaissent) plan projectif

$$\mathbb{RP}^2 = S^2 / \{\pm id\}$$

Sphère trouée $\cup_\partial$ ruban de Möbius (on recolle sur le bord d'une sphère trouée un ruban de Möbius)

Déf. S surface, $x \in S$

Espace tangent de $x \in S$: $T_x S = \{\gamma'(0) ; \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{C^1} S \text{ tq } \gamma(0) = x\}$.



$\tilde{v} \in T_x S$

S

Ex. $T_x S^2 = x^\perp$.

Voyons que $T_x S^2 \subset x^\perp$.

Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{C^1} S^2$ tel que $\gamma(0) = x$, on écrit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

On a : $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, car $\gamma(t) \in S^2$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

En dérivant en $t=0$: $2(\gamma_1(0)\dot{\gamma}_1(0) + \gamma_2(0)\dot{\gamma}_2(0) + \gamma_3(0)\dot{\gamma}_3(0)) = 0$.

Donc : $2\langle \gamma(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = 0$ et $\dot{\gamma}(0) \in x^\perp$, car $\gamma(0) = x$.

Prop. $T_x S$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.

Dém (idée). S est localement un plan, donc on peut "localement additionner" les courbes de S et la dérivation est linéaire. ∎

Rem. On a $\dim(T_x S^2) = 2 = \dim(x^\perp)$ et $T_x S^2 \subset x^\perp$, donc $T_x S^2 = x^\perp$.

1.2. Gradient et points critiques

Soient S une surface, $x \in S$ et $f : S \to \mathbb{R}$.

Déf. $f : S \to \mathbb{R}$ lisse en x : $\forall \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{C^\infty} S$, $\gamma(0) = x$, $f \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ C^∞ en 0.

Supposons f lisse en x, on pose : $l(f)_x : T_x S \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\big|_{t=0}$, où $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = v$.

Prop. $l(f)_x$ est bien définie et linéaire.

Dém. Comme f est lisse en x, $f \circ \gamma$ est dérivable en 0.

Soient $\gamma, \gamma' :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{C^1} S$ tels que $\gamma(0) = x = \gamma'(0)$, $\dot{\gamma}(0) = v = \dot{\gamma}'(0)$, voyons que : $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma')(t)\big|_{t=0}$

ce qui montrera que $l(f)_x(v)$ ne dépend pas du choix de γ.

C'est un problème local et localement $S = \mathbb{R}^2$, donc supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Par la règle de la chaîne : $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\big|_{t=0} = d_{\gamma(0)} f(\dot{\gamma}(0)) = d_x f(\dot{\gamma}(0))$ et $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma')(t)\big|_{t=0} = d_{\gamma'(0)} f(\dot{\gamma}'(0)) = d_x f(\dot{\gamma}'(0))$, et ces deux quantités sont égales.

La linéarité de $l(f)_x$ provient de la linéarité de la dérivation. ∎

Prop. $\exists!\, w \in T_xS$ tq $\forall v \in T_xS$, $d(f)_x(v) = \langle v, w\rangle$.
$w = \nabla_x f$ est le gradient de f en x.

Dém. $\begin{array}{rcl} T_xS & \longrightarrow & (T_xS)^* \\ v & \longmapsto & \langle v, \cdot\rangle \end{array}$ est linéaire et injective, car si $\langle v, \cdot\rangle \equiv 0$, alors $\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\|v\|^2} = 0$ et $v = 0$.

Comme $\dim(T_xS) = \dim((T_xS)^*)$, c'est aussi un isomorphisme.
Or : $d(f)_x \in (T_xS)^*$.
D'où le résultat. ■

Rem. Dans un Hilbert, c'est le théorème de représentation de Riesz qui prend le relai.

Prop. ∇f est orthogonal aux lignes de niveau de f.
f croît le long des trajectoires de ∇f.

Dém. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}$ tq $f\circ\gamma \equiv$ cste.
On a : $\underbrace{d(f)_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))}_{\langle \dot\gamma(t), \nabla_{\gamma(t)} f\rangle} = 0$, donc $\nabla_{\gamma(t)} f \perp \dot\gamma(t)$

point de la ligne de niveau

tangent à la ligne de niveau.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}$ tq $\dot\gamma = \nabla_\gamma f$.
On a : $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)_{|t=t_0} = d(f)_{\gamma(t_0)}(\dot\gamma(t_0))$

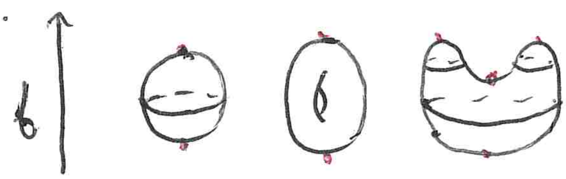
$= \langle \dot\gamma(t_0), \nabla_{\gamma(t_0)} f\rangle$, déf du gradient

$= \langle \nabla_{\gamma(t_0)} f, \nabla_{\gamma(t_0)} f\rangle$, trajectoire

$= \|\nabla_{\gamma(t_0)} f\|^2 \geq 0$. ■

Déf. x est un point critique de f si $\nabla_x f = 0$.

Ex.



• point critique

1.3. Fonctions de Morse

Déf. $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction de Morse si au voisinage de chacun de ses points critiques son gradient ressemble à l'un des modèles suivants :

($\exists \varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ difféo tq $\varphi^* \nabla f : x \mapsto (d_x \varphi)^{-1}(\nabla_{\varphi(x)} f)$ soit :)

min
indice 0

max
indice 2

col
indice 1

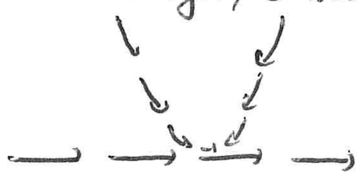
(pas de spiralement)

Rem. Il revient au même de demander que la hessienne de f en ses points critiques soit une matrice symétrique (lemme de Schwarz) inversible.
On dit que les points critiques d'une fonction de Morse sont non dégénérés.
Thm spectral : hessienne diagonalisable à vp $\neq 0$.
indice $= \#$ vp < 0 de la hessienne.

Rem. Thm de redressement (cours d'EDO)
Si x n'est pas un point critique de f, le gradient de f ressemble à .

Ex. $(x,y) \mapsto x^2+y^2$, 0 seul point critique, gradient $(2x, 2y)$, min
$(x,y) \mapsto -x^2-y^2$, , $(-2x,-2y)$, max
$(x,y) \mapsto x^2-y^2$, , $(2x,-2y)$, col

Contre-ex. $(x,y) \mapsto x^3 - 3xy$ (selle de singe), 0 seul point critique, gradient $(3x^2-3y, -3x)$



ne correspond à aucun modèle

Les fonctions de Morse sont génériques :

Thm. Les fonctions de Morse forment un ensemble qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses de fonctions.

Dém. Application du théorème de Sard. ∎

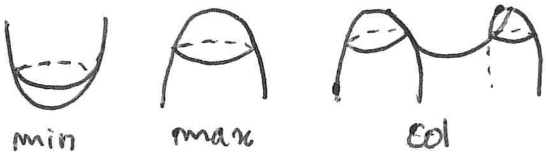
Rem. Thm de Baire : les fonctions de Morse sont denses.
Toute fonction est approximable par des fonctions de Morse.

Toutes les fonctions de Morse se ressemblent et leurs points critiques sont en nombre fini :

Thm. (Lemme de Morse)
$f : S \to \mathbb{R}$ Morse, (x_0, y_0) point critique, $\exists \varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ difféo tq $f \circ \varphi(x,y) = f(x_0,y_0) \pm x^2 \pm y^2$.

Dém. Thm d'inversion locale + réduction des formes quadratiques. ∎

Sous-niveaux d'une fonction de Morse :



analogie avec les cartes topographiques

2. Évolution de la topologie des sous-niveaux

Soient S une surface et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse.

Notation. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f^a le sous-niveau $f^{-1}(]-\infty, a])$.

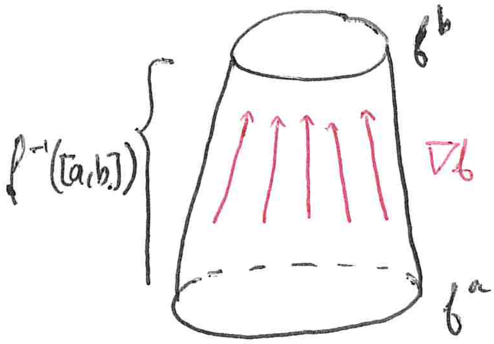
Observation. Comme S est compacte, $\min f$ et $\max f$ existent.

Pour $a < \min f$ et $b > \max f$, on a : $f^a = \emptyset$ et $f^b = S$.

Conclusion : comprendre les changements de topologie de $a \mapsto f^a$ permet de comprendre la topologie de S.

Thm. Soient $a < b$ tels que $f^{-1}([a,b])$ ne contiennent pas de point critique de f, alors f^a et f^b sont difféomorphes.

Dém. $\nabla f|_{f^{-1}([a,b])}$ ne s'annule pas, donc par théorème de redressement :



En suivant le champ de vecteurs ∇f pendant un temps $b-a$, on obtient un difféomorphisme φ poussant f^a sur f^b (flot). ∎

Rem. La topologie des sous-niveaux de f ne changent pas tant que l'on ne franchit pas un point critique de f.

Cor. Si f n'a que deux points critiques, alors S est homéomorphe à une sphère.

Dém. Les deux points critiques sont le min et le max de f.

Comme S est compacte et connexe, $f(S)$ aussi et on peut supposer (quitte à pré-composer par une application affine (difféo)) que $f(S) = [0,1]$.

Pour ε suffisamment petit, le lemme de Morse garantit que $f^{-1}([0,\varepsilon])$ et $f^{-1}([1-\varepsilon, 1])$ sont des disques

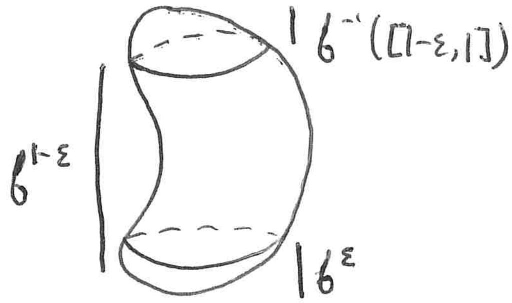
De plus, $f^{-1}([\varepsilon, 1-\varepsilon])$ ne contient pas de point critique de f.

Donc, par le théorème : $f^{1-\varepsilon} \cong f^{\varepsilon} \cong D^2$.

On a : $S = f^1 = f^{1-\varepsilon} \sqcup_g f^{-1}([1-\varepsilon, 1])$

$$\cong D^2 \sqcup_g D^2$$

$$\underset{\text{homéo}}{\cong} S^2.$$



∎

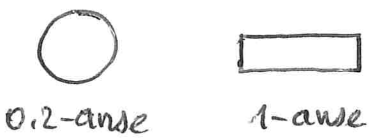
Rem. Le théorème est faux si l'on remplace homéomorphisme par difféomorphisme.

Contre-ex. Sphère de Milnor ($n=7$, 1956)

Phénomène lié à la conjecture de Poincaré (sphère exotique)

Que se passe-t-il lorsque l'on franchit un point critique ?

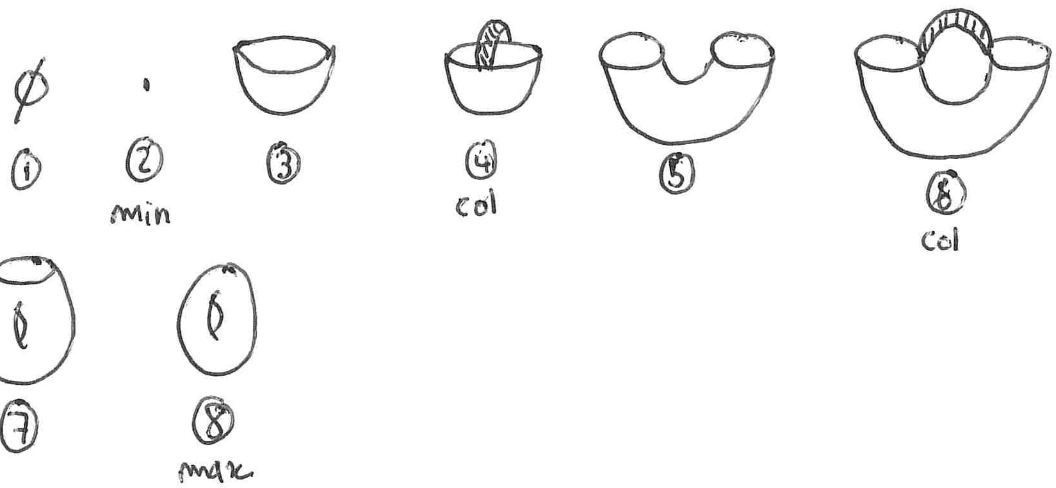
Déf. Soit $k \in \{0,1,2\}$, une k-anse est $H_k = D^k \times D^{2-k}$.



Thm. Soient a un point critique de f et $\varepsilon > 0$ tel que $f^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon])$ ne contient pas d'autre point critique de f que a, alors $f^{a+\varepsilon}$ est obtenu par attachement d'une k-anse sur $f^{a-\varepsilon}$, où k est l'indice de a pour f.

Ex.

Évolution des sous-niveaux :



Dém. C'est un problème local, donc quitte à composer par un difféomorphisme, le lemme de Morse assure que : $f(x,y) = f(x_0,y_0) \pm x^2 \pm y^2$, où $a = (x_0,y_0)$.

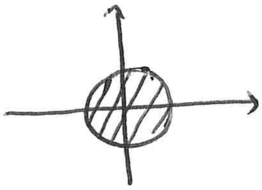
Examinons $f^{a+\varepsilon}$ et $f^{a-\varepsilon}$.

. Cas 1 : $\operatorname{ind} a = 0, 2$, $f(x) = f(x_0,y_0) + x^2 + y^2$

$f(x_0,y_0) - x^2 - y^2$

$\emptyset$

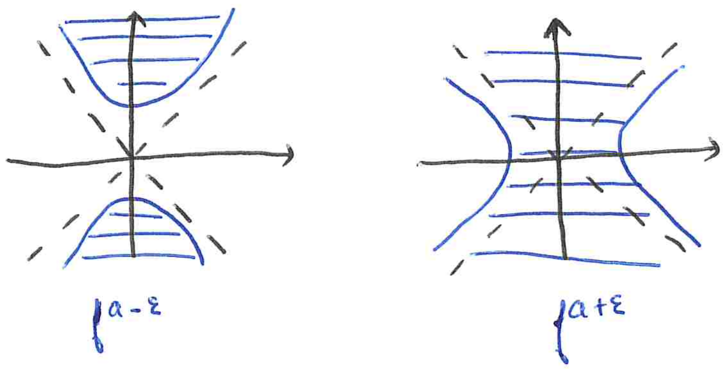
$f^{a-\varepsilon}$

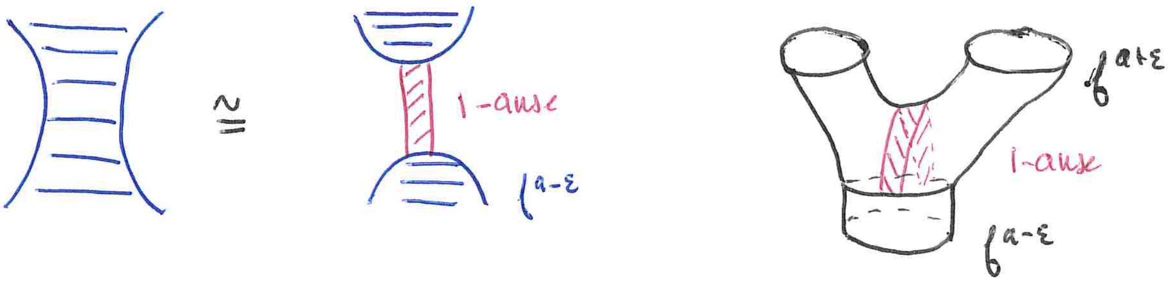


ajout d'un disque

$f^{a+\varepsilon}$

. Cas 2 : $\operatorname{ind} a = 1$, $f(x) = f(x_0,y_0) + x^2 - y^2$.





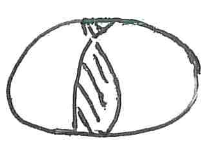
∎

Cor. Toutes les surfaces sont obtenues par attachement d'anse sur un disque.

Dém. Existence de fonctions de Morse + thm d'évolution. ∎

Rem. Les surfaces sont :

L'orientabilité implique que l'attachement d'une 1-anse ne se fait pas comme ça :



(Möbius)

On a toutes les surfaces, mais pourquoi sont-elles deux à deux non équivalentes ?

3. Topologie et combinatoire des points critiques

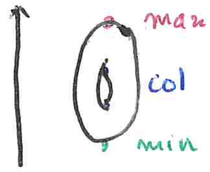
Comment distinguer les surfaces ?

↳ Construction d'un invariant.

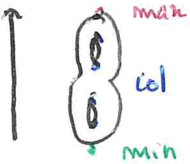
Déf. La caractéristique d'Euler de S est $\chi(S) = \#\max f - \#\text{col} f + \#\min f$.

Ex.

$\chi(S^2) = \underset{1}{\bullet} - \underset{0}{\bullet} + \underset{1}{\bullet} = 2.$



$\chi(T^2) = \underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} + \underset{1}{\bullet} = 0.$



$\chi(T^2 \# T^2) = \underset{1}{\bullet} - \underset{4}{\bullet} + \underset{1}{\bullet} = -2$

Plus généralement : $\chi(S) = 2 - 2g$, où $g = \text{genre}(S)$ est le nombre de trou de S.

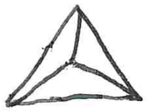
Prop. $\chi(S)$ ne dépend pas de la fonction de Morse choisie sur S.

Dém (idée). fonction de Morse $f \rightsquigarrow$ triangulation de S

avec $\#\max f - \#\text{col} f + \#\min f = \#\text{triangle} - \#\text{arete} + \#\text{sommet}$

Or : $\#\text{triangle} - \#\text{arete} + \#\text{sommet}$ ne dépend pas de la triangulation.

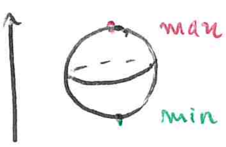
$\#\text{triangle} - \#\text{arete} + \#\text{sommet}$
$= 1 - 3 + 3$
$= 1$



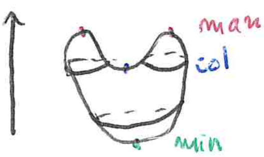
$\#\text{triangle} - \#\text{arete} + \#\text{sommet}$
$= 3 - 6 + 4$
$= 1$

D'où le résultat. ∎

Ex.



$\chi(S^2) = 2$



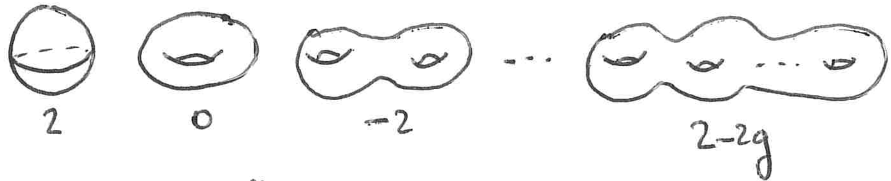
$\chi(S^2) = 2 - 1 + 1 = 2$

Attention, il n'est pas vrai que $\#\max$, $\#\text{col}$, $\#\min$ sont invariants.

Prop. Si S et S' sont des surfaces difféomorphes, alors $\chi(S) = \chi(S')$.

Dém. Soient $\varphi : S \to S'$ un difféomorphisme et $f : S' \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse, alors $\varphi^* f : S \to \mathbb{R}$ est de Morse et par la règle de la chaîne : $\text{Crit}(\varphi^* f) = \varphi(\text{Crit} f)$, de plus : $\text{ind}_{\varphi^* f} \varphi(x) = \text{ind}_f x$, donc : $\#\max \varphi^* f - \#\text{col} \varphi^* f + \#\min \varphi^* f = \#\max f - \#\text{col} f + \#\min f$. ∎

Rem.



sont deux à deux non difféomorphes et on a la classification des surfaces.

Rem. La caractéristique d'Euler est aussi invariante par homéomorphisme.

Inégalités de Morse.

Nombres de Betti : b_0 = # points indépendants = # composante connexe

b_1 = # lacets indépendants (non homotopes)

↳ déformation de lacets

$= \operatorname{rg} \pi_1(S, .)^{ab}$

b_2 = # surfaces indépendantes

Dualité de Poincaré : $b_0 = b_2$.

Ex.

$b_0 = 1$
$b_1 = 0$
$b_2 = 1$

$b_0 = 1$
$b_1 = 2$
$b_2 = 1$

On rétracte les lacets sur des points (simple connexité)

Les nombres de Betti sont de nature topologique.

Nombres de Morse : c_0 = # min

c_1 = # col

c_2 = # max

Les nombres de Morse sont de nature différentielle.

Les nombres de Betti et de Morse sont pourtant liés.

Thm (inégalité de Morse)

On a : $c_0 \geq b_0$ (1) , en particulier : $c_0 \geq b_0$.

$c_1 - c_0 \geq b_1 - b_0$ (2) $\qquad c_1 \geq b_1$

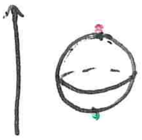
$c_2 - c_1 + c_0 = b_2 - b_1 + b_0$ (3) $\qquad c_2 \geq b_2$

Dém. Homologie + suite exacte + thm du rang : $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 = (b_0 + b_1 t + c_2 t^2) + (1+t)p(t)$, $p(t) \in \mathbb{N}[t]$

D'où le résultat.

On obtient les autres inégalités en formant (1)+(2) et (2)+(3). ∎

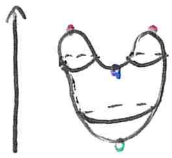
Ex.



$b_0 = 1$ $c_0 = 1$
$b_1 = 0$ $c_1 = 0$
$b_2 = 1$ $c_2 = 1$

$b_0 = 1$ $c_0 = 1$
$b_1 = 2$ $c_1 = 2$
$b_2 = 1$ $c_2 = 1$

En général, ce ne sont pas des égalités :



$b_0 = 1$ $c_0 = 1$
$b_1 = 0$ $c_1 = 1$
$b_2 = 1$ $c_2 = 2$

Explication des inégalités de Morse faibles avec le théorème de reconstruction :

- Naissance des composantes connexes : disque (0-anse), min,
- Fermeture des composantes connexes (sans bord) : disque (2-anse), max,
- Naissance de lacets non triviaux : bande (1-anse), col.

↳ disques sont contractiles

Cela donne : $c_0 \geq b_0$
$c_2 \geq b_0 = b_2$
$c_1 \geq b_1$

Conclusion. Pour aller plus loin :

dimension supérieure : variétés riemanniennes
homologie de Morse : enrichir la caractéristique d'Euler
théorie de Morse-Bott : généraliser les fonctions de Morse, autoriser des sous-variétés de points critiques
théorie de Cerf : théorie de Morse à paramètres, bifurcations (naissance, mort, croisement)
↳ Dans mon doctorat, tout ceci est mélangé !