Explique moi...

# Les feuilletages

Ella BLAIR

23 novembre 2020

Mon parcours :

- CPGE
- L3-M2 : Jussieu

  licence, master 1 mathématiques et applications

  entre M1 et M2 : année de césure à BOSTON

  master 2 de mathématiques fondamentales

  (en commun P6/P7/P13)

  ⇝ pensez aux financements de master : FMJH FSMP !

- Thèse au LMO

  "Livres ouverts et fibrations nouées en géométrie de contact"

  avec Anne Vaugon et Frédéric Bourgeois

# Structure de l'exposé

① **DEF**
- → les feuilletages de codimension 1 dans $\mathbb{R}^3$
- → les champs de plans
- → la notion d'intégrabilité

Thm (Thurston - Wood) : dans une variété de dimension 3 connexe compacte orientable, tout champ de plans est homotope à un champ de plans intégrable.

② **DEMO**
- → triangulation
- → épaississement
- → remplissage

① # Les feuilletages de codimension 1

## (A) dans $\mathbb{R}^2$

On considère $M^{(2)} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, connexe,

incluo dans un compact $K$

(ou $M^{(2)}$ une surface compacte connexe sans bord

DEF: $\gamma \subset M$ est une courbe si

$\forall x \in \gamma \; \exists U \ni x$ et $\varphi_x : U \overset{\sim}{\to} \mathbb{R}$ submersion, $\gamma \cap U = \varphi^{-1}(0)$

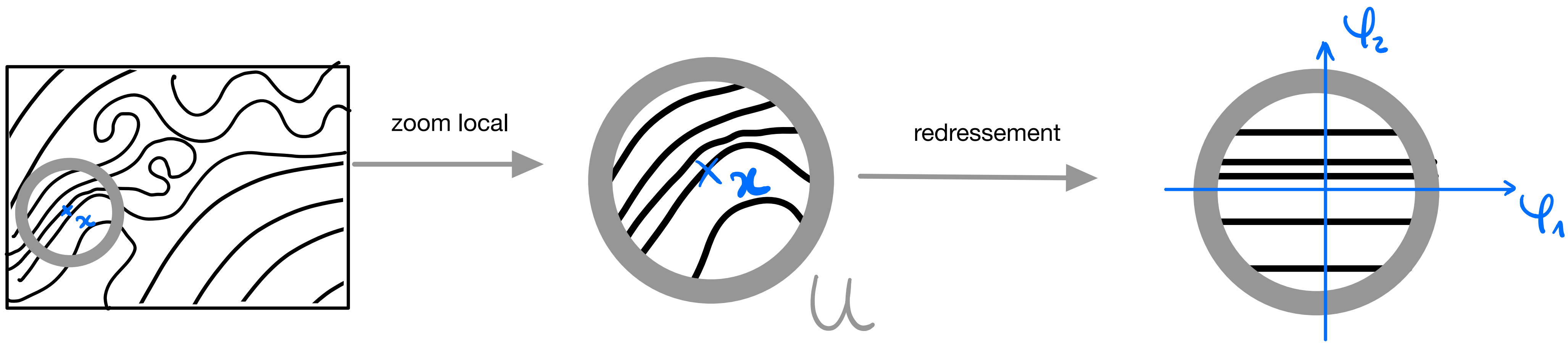
(def implicite de ss-var

↳ aussi version eqte paramétrique ou redressement)

①

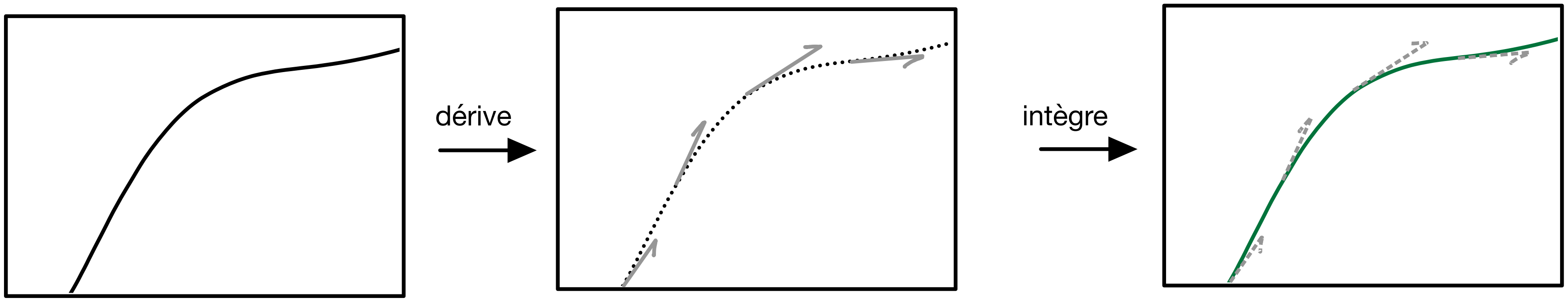
## Ⓐ dans $\mathbb{R}^2$

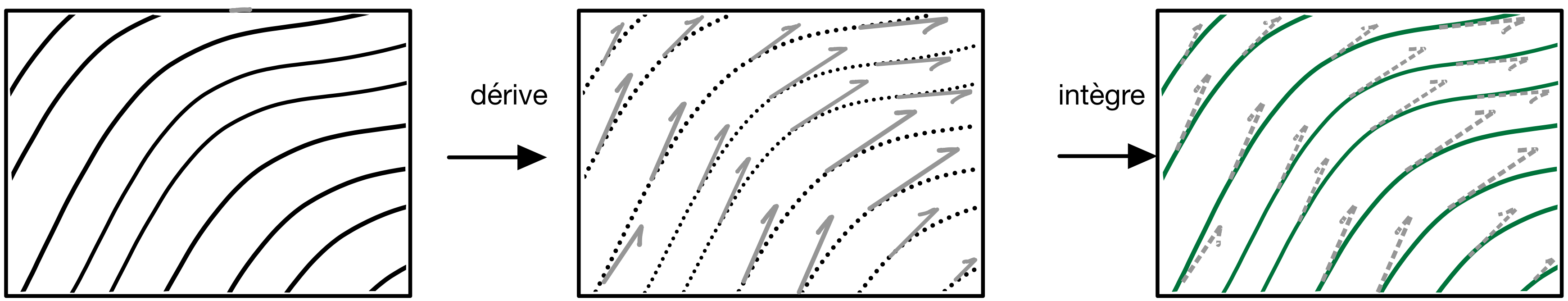
**DEF:** Un feuilletage de codimension 1 de $\Pi^{(2)} \subset \mathbb{R}^2$ est la donnée d'une famille de courbes $\{\gamma_a\}_{a\in A}$ tel que $\forall x \in \Pi$, $\exists U \ni x$ voisinage ouvert de $x$ et des coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2) : U \to \mathbb{R}^2$, tels que $\forall \gamma_a$, les composantes de $\gamma_a \cap U$ sont décrites par $\varphi_2 = \text{cte}$



1

A dans $\mathbb{R}^2$



① 

Ⓐ dans $\mathbb{R}^2$

# Le théorème de Cauchy-Lipschitz

garantit l'existence de courbes intégrales maximales

**Théorème** (Cauchy-Lipschitz). *Si $X : U \to \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne, alors pour toute condition initiale $x_0 \in U$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe $T > 0$ tel que l'équation différentielle $x' = X(x)$ admet une unique solution définie sur $]t_0 - T, t_0 + T[$ vérifiant $x(t_0) = x_0$.*

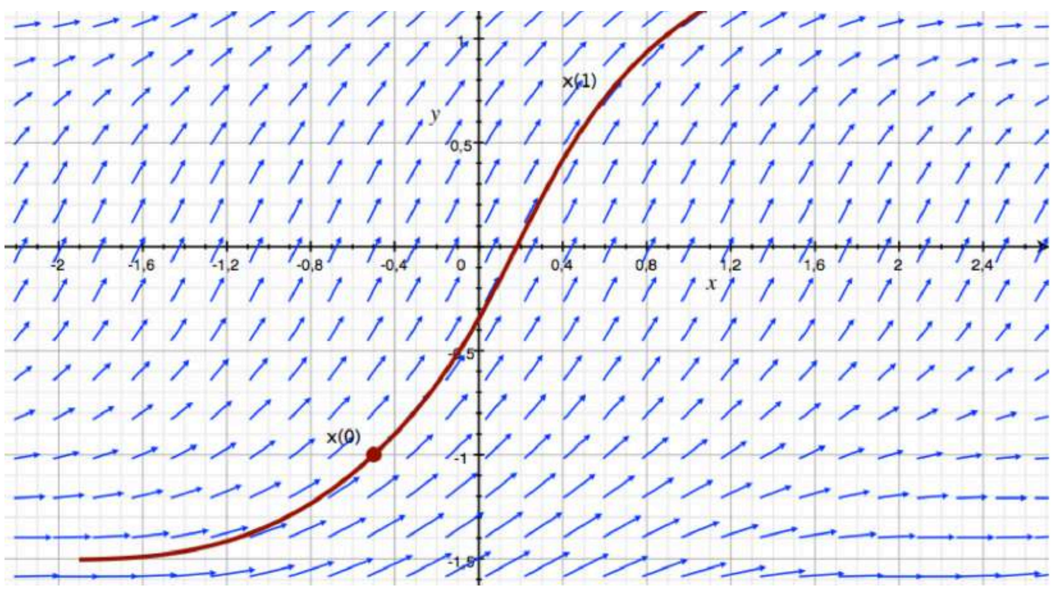



image de Frédéric Le Roux

①

## Ⓑ dans $\mathbb{R}^3$

$\Omega^{(3)}$ est :

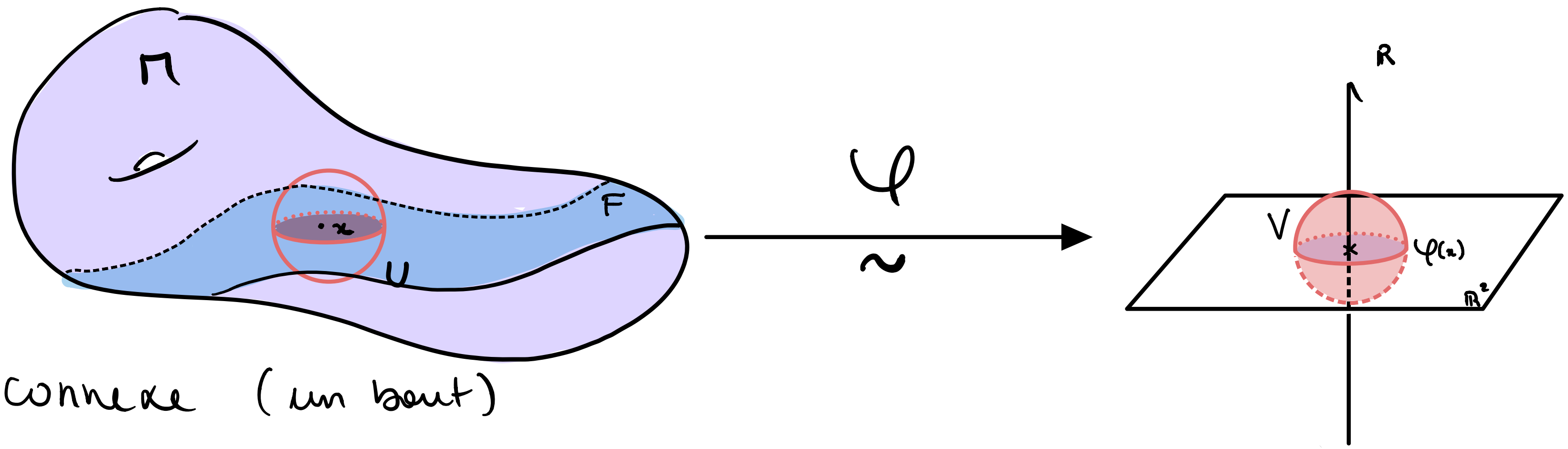
- un ouvert, connexe, inclus dans un compact

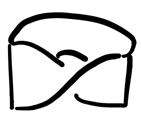
F est :

- une sous variété de codimension 1 de $\mathbb{R}^3$ si,

  $\forall x \in F, \exists U \in \mathcal{VO}_x(\mathbb{R}^3), \exists \varphi : U \xrightarrow{\sim} V \in \mathcal{VO}_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^3)$ difféomorphisme

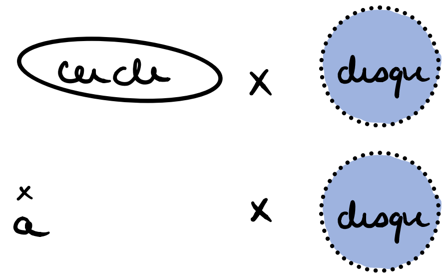
  tel que $\varphi(F \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$ (redressement)

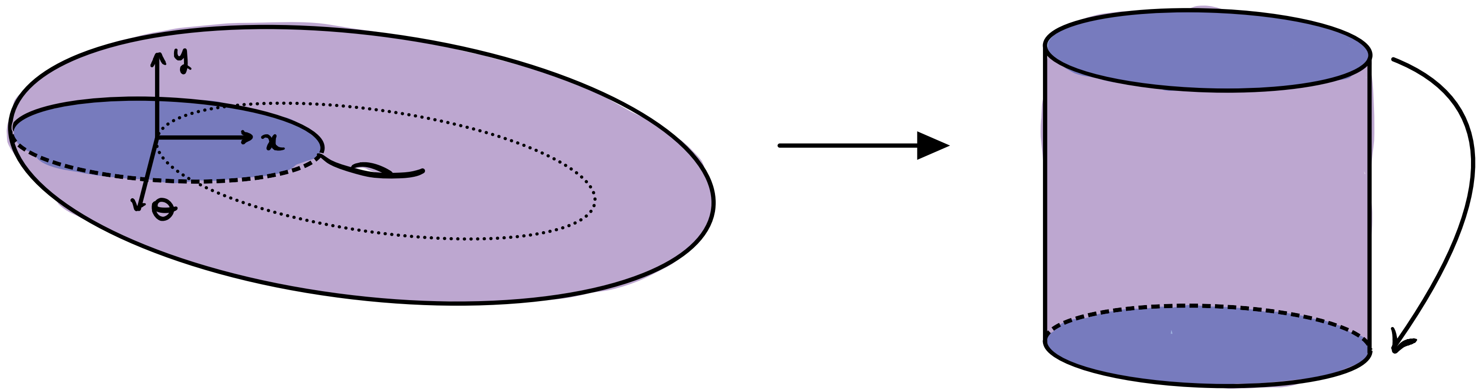



- connexe (un bout)
- orientable : (le ruban de Möbius  $\not\hookrightarrow F$) ne se plonge pas dans F

① **exemple** : $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$

$F = \{a\} \times \mathbb{D}^2$




$$\left\{ \left( (2 + r\cos(t))\sin(s),\ (2 + r\cos(t))\cos(s),\ r\sin(t) \right),\ \begin{array}{l} s, t \in [0, 2\pi] \\ r \in [0,1] \end{array} \right\}.$$

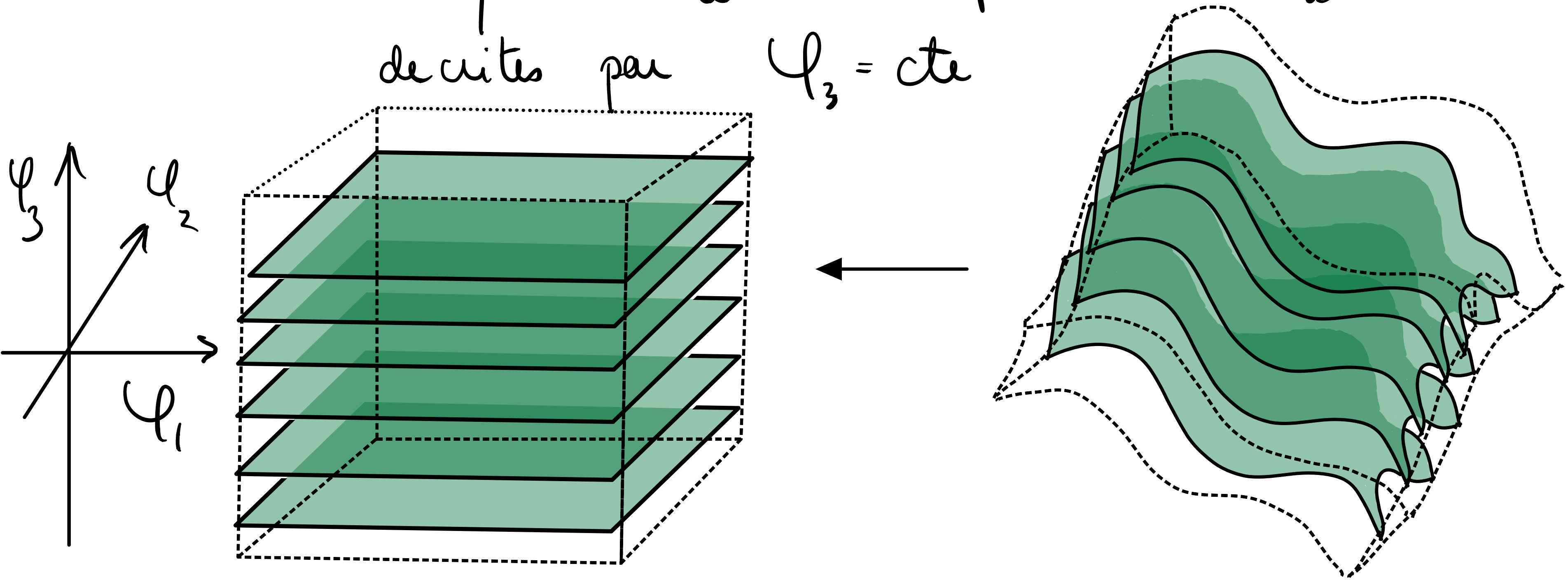
1

## (B) dans $\mathbb{R}^3$

**DEF:** Un feuilletage de codimension 1 de $M^{(3)} \subset \mathbb{R}^3$ est la donnée d'une famille de sous variété de codimension 1 de $M$ $\{F_a\}_{a\in A}$ tel que $\forall x \in M$, $\exists U \ni x$ voisinage ouvert de $x$

et des coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : U \to \mathbb{R}^3$,

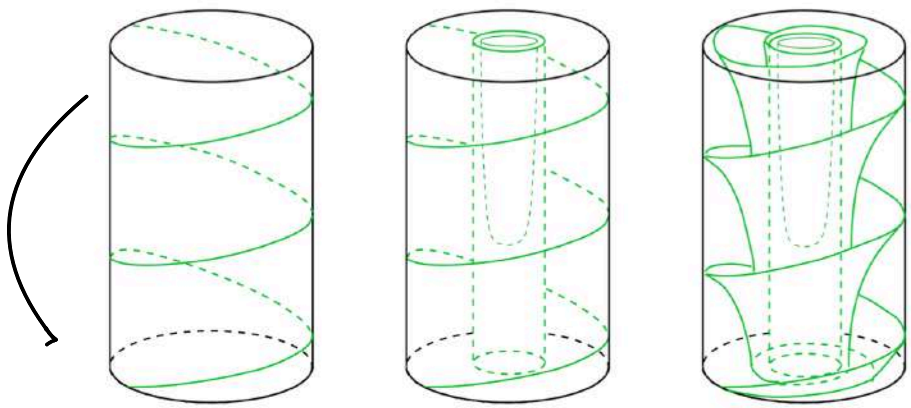
tels que $\forall F_a$, les composantes de $F_a \cap U$ sont decrites par $\varphi_3 = cte$

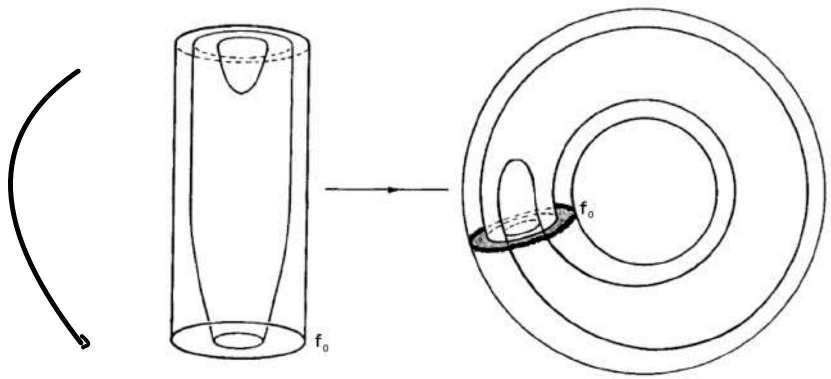


①

(B) dans $\mathbb{R}^3$

exemple : le tore plein $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ et ses feuilletages de Reeb

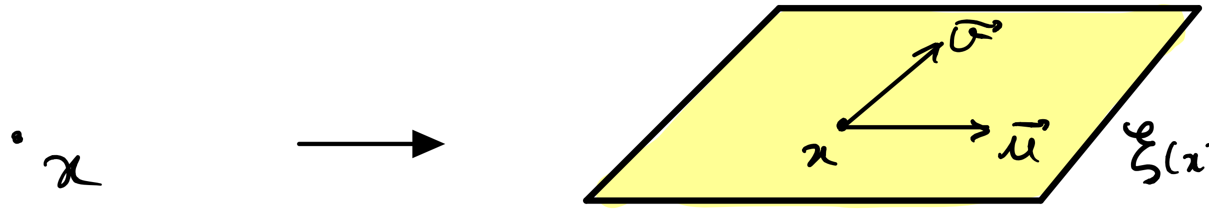




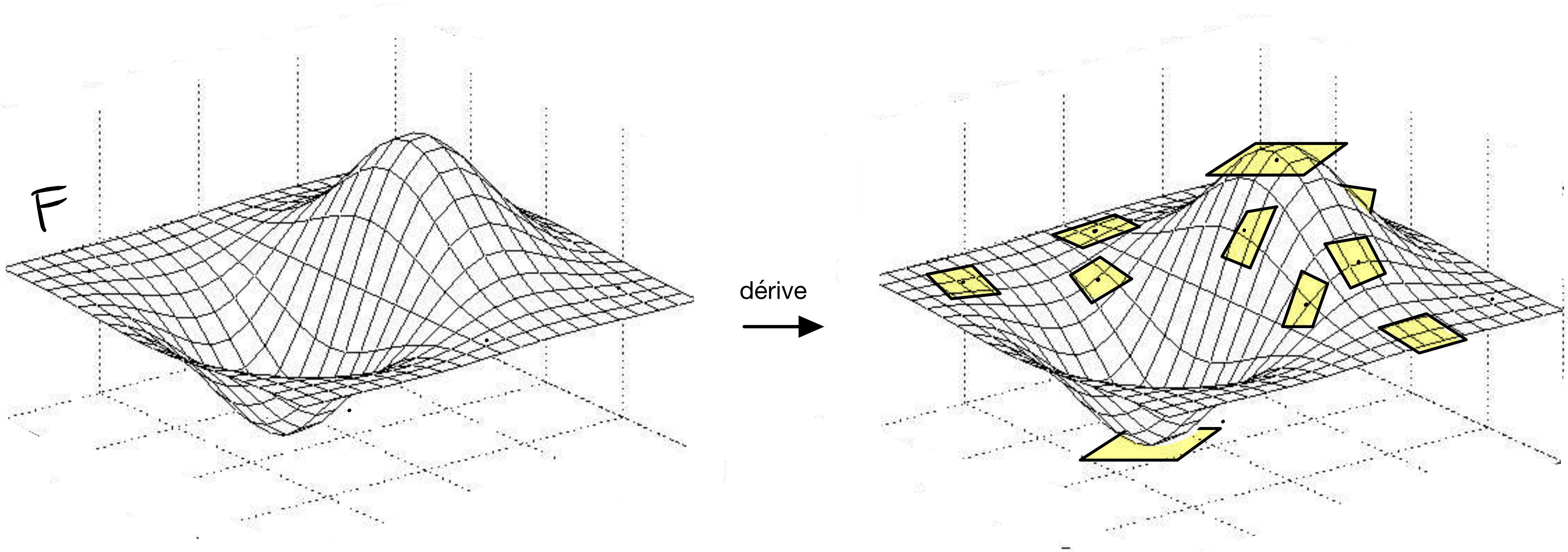

images de Hélène Eynard-Bontemps

1

## B) dans $\mathbb{R}^3$




$\xi(x) = (\vec{u}, \vec{v})$




ainsi : feuilletage de $M$ $\xrightarrow{\text{dérive}}$ champ de plans dans $M$

$\mathcal{F} = \{F_a\}_{a \in A}$ $\qquad$ $\xi \in \mathcal{C}^\infty(M, (\mathbb{R}^3)^2)$

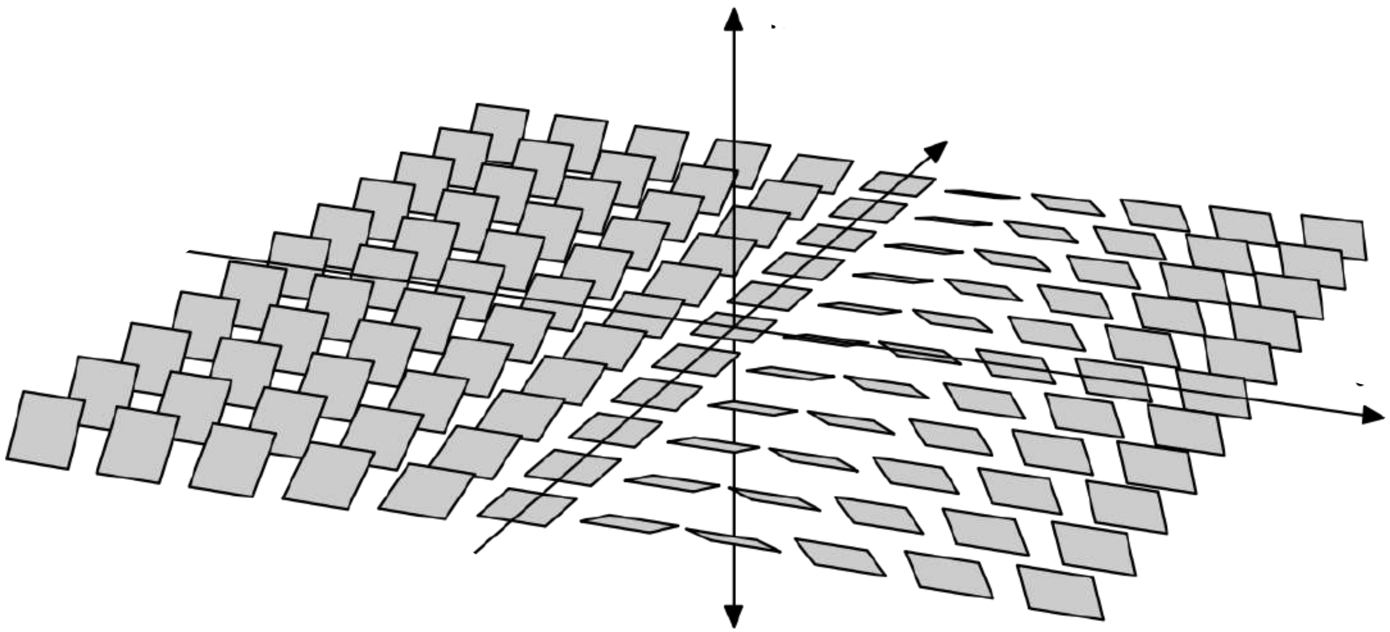
①

## Ⓑ dans $\mathbb{R}^3$

# Mais qu'en est-il de l'intégration ?

...un champ de plans sur $M$ n'est pas forcément associé à un feuilletage...

<u>exemple</u> :



"structure de contact"

①

**DEF:** On dit qu'un champ de plans $\xi$ sur $M$ est intégrable si il est le champ de vecteurs tangents d'un feuilletage de $M$

**DEF:** une homotopie de champs de plans entre $\xi$ et $\xi' \in \mathcal{C}^\infty(M, (\mathbb{R}^3)^2)$ est une famille $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ telle que

$$\begin{cases} \xi_0 = \xi, \ \xi_1 = \xi' \\ \forall t \in [0,1] \ \xi_t \in \mathcal{C}^\infty(M, (\mathbb{R}^3)^2) \text{ champ de plans} \\ H : (x,t) \mapsto \xi_t(x) \text{ est continue} \end{cases}$$

"déformation continue de champs de plans"

**THM** (Thurston-Wood): Tout champ de plans sur $M$ peut être déformé continuement en un champ de plans intégrable

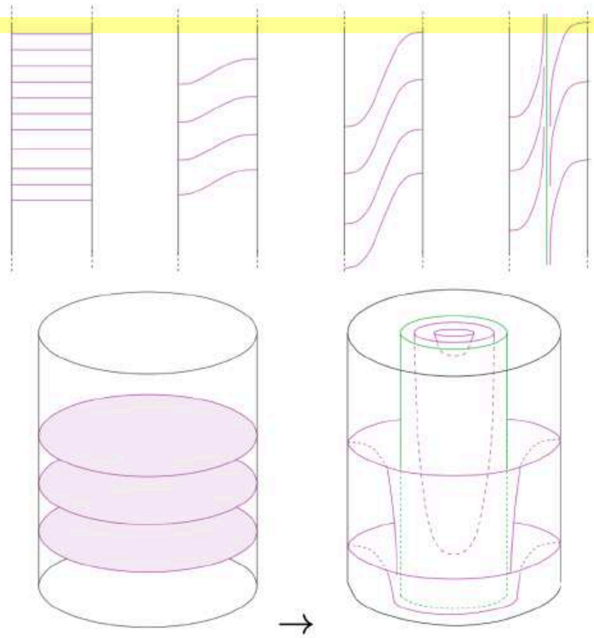
1

## (B) dans $\mathbb{R}^3$

**lemme** (stabilité de Thurston)

Tout champ de plans défini sur $\mathbb{S}^1\times D^2$, transverse à $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, est homotope relativement à $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ (ie $H_{|\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times[0,1]} : (x,t)\mapsto \xi_0(x)$) au champ de plans associé au feuilletage de Reeb avec pour bord le feuilletage associé à $\xi_{|\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}$

idée :



images de Hélène Eynard-Bontemps

clé : simplicité du groupe $\widetilde{\mathrm{Diff}_+}(\mathbb{S}^1)$

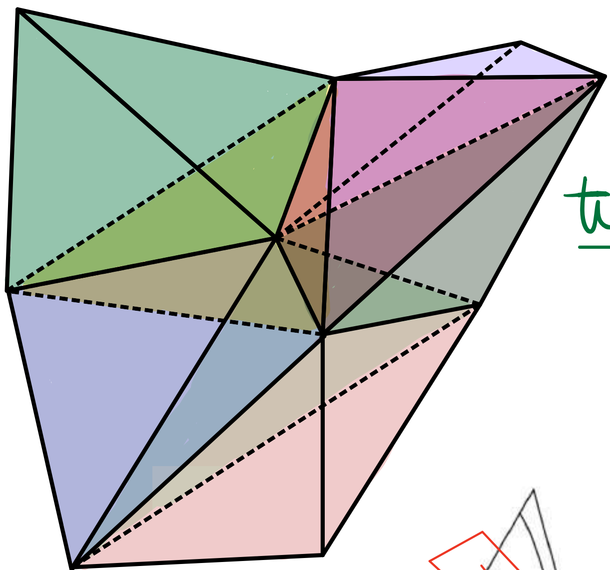
(ie $G \triangleleft \widetilde{\mathrm{Diff}_+}(\mathbb{S}^1)$

$\Rightarrow G = \emptyset$ ou $G = \widetilde{\mathrm{Diff}_+}(\mathbb{S}^1)$)

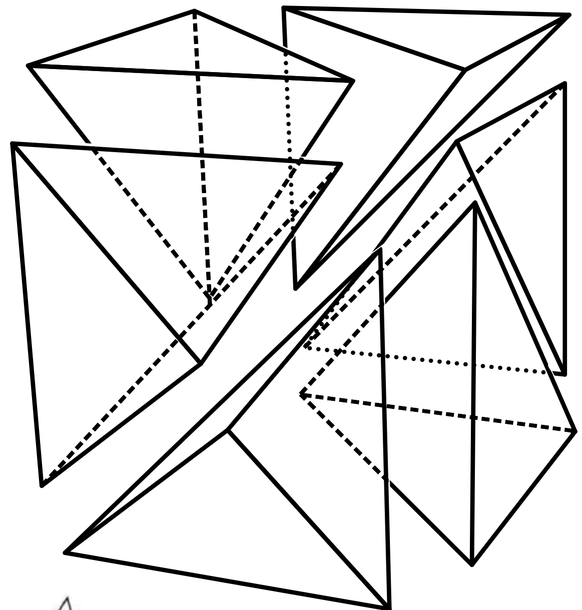
## ② Schéma de preuve :

### Ⓐ Triangulation en bonne position de M

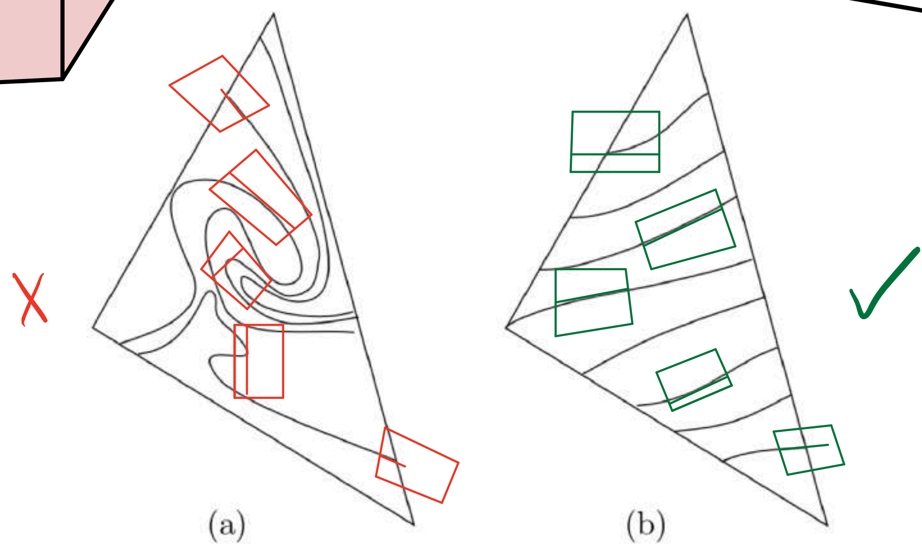
**DEF :**



triangulation



bonne position

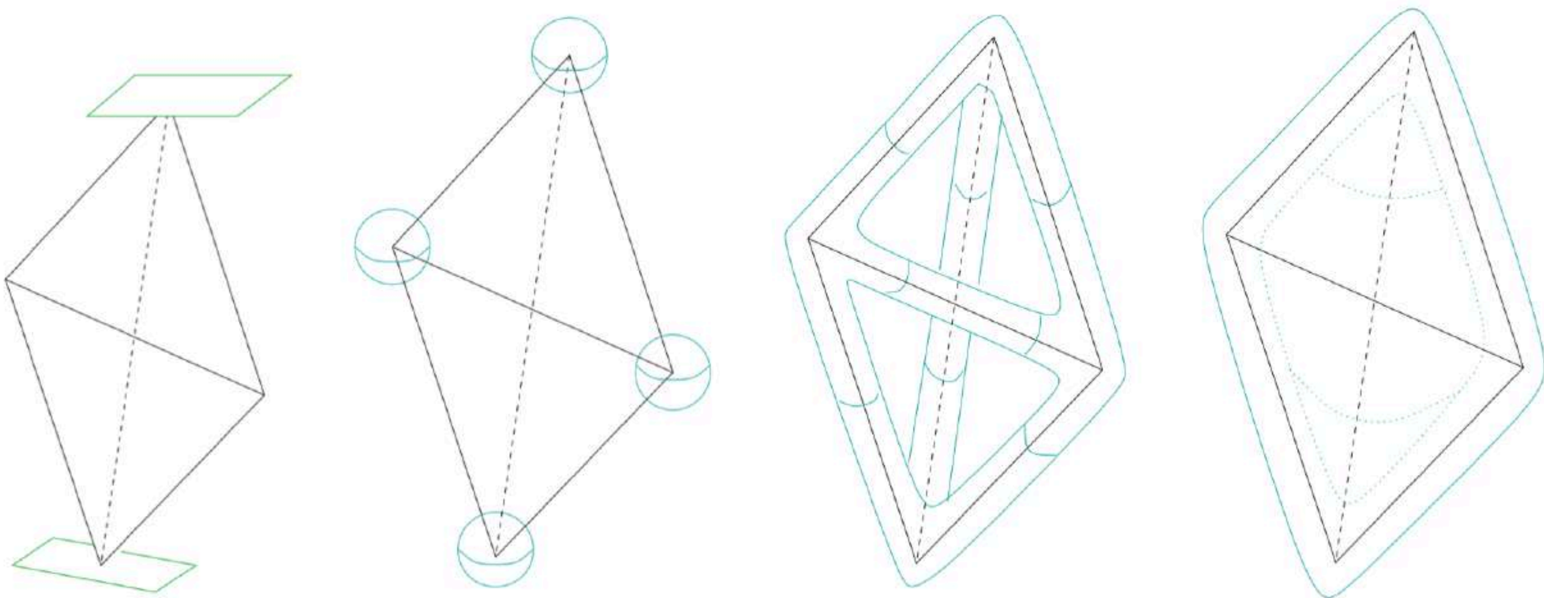



Eynard-Bontemps

(b) est en bonne position alors que (a) n'est que transverse.

2

## B) épaississement

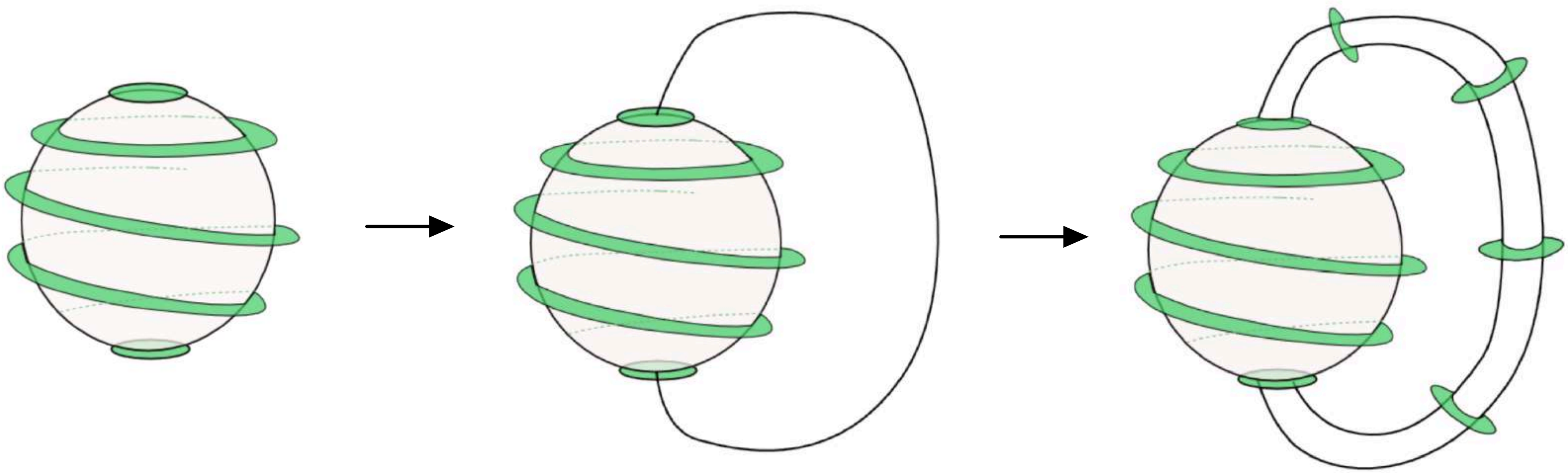


images de Hélène Eynard-Bontemps

On ne peut pas remplir une sphère par autre chose que des disques

2

## c) construction d'un tore remplissable



images de Hélène Eynard-Bontemps

On sait remplir un tore avec des feuilles qui spiralent : feuilletage de Reeb + stabilité de Thurston

②

Ce même schéma de preuve à été appliqué :

- Géometrie de contact

- Thèse de Hélène Eynard-Bontemps

Ella BLAIR
23 novembre 2020

# Merçi !

… des questions ?