Du rotationnel à la cohomologie de de Rham

Antonio López Neumann

9 février 2021

De quoi s'agit-il ?

De quoi s'agit-il ?

- Terence Tao : The integration on forms concept is of fundamental importance in differential topology, geometry, and physics, and also yields one of the most important examples of cohomology, namely **de Rham cohomology**, which (roughly speaking) **measures precisely the extent to which the fundamental theorem of calculus fails in higher dimensions** and on general manifolds.

De quoi s'agit-il ?

- Terence Tao : The integration on forms concept is of fundamental importance in differential topology, geometry, and physics, and also yields one of the most important examples of cohomology, namely **de Rham cohomology**, which (roughly speaking) **measures precisely the extent to which the fundamental theorem of calculus fails in higher dimensions** and on general manifolds.
- Le théorème de de Rham nous dit que cette cohomologie coïncide avec le dual de l'homologie singulière de la variété en question. Ce défaut correspond alors aux "trous" de notre variété.

Dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}$

- On a le théorème fondamental de l'analyse classique : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans $\mathbb{R}$

- On a le théorème fondamental de l'analyse classique : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

- Dans la citation de Terence Tao, on pense au corollaire suivant : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $f' = 0$, alors $f =$ constante.

Dans $\mathbb{R}$

- On a le théorème fondamental de l'analyse classique : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

- Dans la citation de Terence Tao, on pense au corollaire suivant : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $f' = 0$, alors $f =$ constante.
- Premier type de problème : si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ C^∞ telle que $f' = 0$, alors f est constante sur chaque composante connexe.

Dans $\mathbb{R}$

- On a le théorème fondamental de l'analyse classique : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

- Dans la citation de Terence Tao, on pense au corollaire suivant : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $f' = 0$, alors $f =$ constante.
- Premier type de problème : si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ C^∞ telle que $f' = 0$, alors f est constante sur chaque composante connexe.
- Défaut évident : $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe

Dans $\mathbb{R}$

- On a le théorème fondamental de l'analyse classique : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

- Dans la citation de Terence Tao, on pense au corollaire suivant : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $f' = 0$, alors $f =$ constante.
- Premier type de problème : si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ C^∞ telle que $f' = 0$, alors f est constante sur chaque composante connexe.
- Défaut évident : $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe
- Est-ce le seul type de défaut possible ?

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: gradient

- Passons à $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: gradient

- Passons à $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
- Trois opérateurs différentiels définis sur U.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: gradient

- Passons à $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
- Trois opérateurs différentiels définis sur U.
- Le *gradient* $\nabla : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ est défini par :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: gradient

- Passons à $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
- Trois opérateurs différentiels définis sur U.
- Le *gradient* $\nabla : C^\infty(U,\mathbb{R}) \to C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ est défini par :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- Ce sont quoi les analogues du TFA ?

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: gradient

- Passons à $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
- Trois opérateurs différentiels définis sur U.
- Le *gradient* $\nabla : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ est défini par :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- Ce sont quoi les analogues du TFA ?
- On commence par le TFA (au sens de la citation de Tao) en plusieurs variables : lorsque U est connexe on a, $\nabla f = 0 \implies f = \text{constante}$.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: gradient

- On aimerait établir des résultats similaires mais pour d'autres opérateurs.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: gradient

- On aimerait établir des résultats similaires mais pour d'autres opérateurs.
- Un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ est *conservatif* s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: gradient

- On aimerait établir des résultats similaires mais pour d'autres opérateurs.
- Un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ est *conservatif* s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$.
- En fait F est conservatif si et seulement si pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to U$ l'intégrale

$$\int_\gamma F(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

ne dépend que des points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: rotationnel

- Le *rotationnel* $\mathrm{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ est l'opérateur qui à un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ associe :

$$\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: rotationnel

- Le *rotationnel* $\mathrm{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ est l'opérateur qui à un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ associe :

$$\mathrm{rot}\, F = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}).$$

- On veut résoudre l'équation différentielle $\mathrm{rot}\, F = 0$ sur U.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: rotationnel

- Le *rotationnel* $\mathrm{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ est l'opérateur qui à un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ associe :

$$\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

- On veut résoudre l'équation différentielle $\mathrm{rot}\, F = 0$ sur U.
- On a des solutions évidentes car $\mathrm{rot} \circ \nabla = 0$. Tout champ de vecteurs F conservatif satisfait $\mathrm{rot}\, F = 0$.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: rotationnel

- Le *rotationnel* $\mathrm{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ est l'opérateur qui à un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ associe :

$$\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

- On veut résoudre l'équation différentielle $\mathrm{rot}\, F = 0$ sur U.
- On a des solutions évidentes car $\mathrm{rot} \circ \nabla = 0$. Tout champ de vecteurs F conservatif satisfait $\mathrm{rot}\, F = 0$.
- A-t-on trouvé toutes les solutions ?

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: rotationnel

- Un premier calcul de cohomologie : lorsque U est simplement connexe (par exemple U étoilé) un champ de vecteurs F sur U est conservatif si et seulement si $\operatorname{rot} F = 0$.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: rotationnel

- Un premier calcul de cohomologie : lorsque U est simplement connexe (par exemple U étoilé) un champ de vecteurs F sur U est conservatif si et seulement si $\operatorname{rot} F = 0$.
- Formule de Stokes : Soit S une surface paramétrée orientée de $\mathbb{R}^3$ bordée par une courbe paramétrée γ orientée de façon compatible avec S. Alors pour tout champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ on a :

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \int_\gamma F(t)\,\mathrm{d}t$$

- Un premier calcul de cohomologie : lorsque U est simplement connexe (par exemple U étoilé) un champ de vecteurs F sur U est conservatif si et seulement si $\operatorname{rot} F = 0$.
- Formule de Stokes : Soit S une surface paramétrée orientée de $\mathbb{R}^3$ bordée par une courbe paramétrée γ orientée de façon compatible avec S. Alors pour tout champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ on a :

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \int_\gamma F(t)\,\mathrm{d}t$$

- C'est faux lorsque U n'est pas simplement connexe. Par exemple si $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ on considère :

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right).$$

On a bien $\operatorname{rot} F = 0$, mais F n'est pas conservatif.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: divergence

- La *divergence* $\mathrm{div} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$ est l'opérateur qui à un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ associe :

$$\mathrm{div}\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

- La *divergence* $\mathrm{div} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$ est l'opérateur qui à un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ associe :

$$\mathrm{div}\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

- On veut résoudre l'équation différentielle $\mathrm{div}\, F = 0$ sur U.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: divergence

- La *divergence* $\operatorname{div} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$ est l'opérateur qui à un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ associe :

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

- On veut résoudre l'équation différentielle $\operatorname{div} F = 0$ sur U.
- On a des solutions évidentes car $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: divergence

- La *divergence* $\mathrm{div} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$ est l'opérateur qui à un champ de vecteurs $F : U \to \mathbb{R}^3$ associe :

$$\mathrm{div}\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

- On veut résoudre l'équation différentielle $\mathrm{div}\, F = 0$ sur U.
- On a des solutions évidentes car $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$.
- A-t-on trouvé toutes les solutions ?

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: divergence

- Un deuxième calcul de cohomologie : lorsque U est étoilé un champ de vecteurs F est le rotationnel d'un champ G (i.e. $F = \mathrm{rot}\, G$) si et seulement si $\mathrm{div}\, F = 0$.

Des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3$: divergence

- Un deuxième calcul de cohomologie : lorsque U est étoilé un champ de vecteurs F est le rotationnel d'un champ G (i.e. $F = \operatorname{rot} G$) si et seulement si $\operatorname{div} F = 0$.
- Ici simplement connexe ne suffit pas ! On peut avoir des ouverts simplement connexes mais avec $H^2_{dR}(U) \neq 0$. Par exemple $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Que constate-t-on ?

Que constate-t-on ?

- Écrivons la suite :

$$0 \to C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty(U,\mathbb{R}) \to 0$$

Que constate-t-on ?

- Écrivons la suite :

  $$0 \to C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty(U,\mathbb{R}) \to 0$$

- On a des solutions évidentes aux équations différentielles $\mathrm{rot}\, F = 0$ et $\mathrm{div}\, F = 0$ car $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0$.

Que constate-t-on ?

- Écrivons la suite :

  $$0 \to C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty(U,\mathbb{R}) \to 0$$

- On a des solutions évidentes aux équations différentielles $\mathrm{rot}\, F = 0$ et $\mathrm{div}\, F = 0$ car $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0$.
- On constate que sous des hypothèses topologiques, ces solutions évidentes sont toutes les solutions.

Que constate-t-on ?

- Écrivons la suite :

$$0 \to C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty(U,\mathbb{R}) \to 0$$

- On a des solutions évidentes aux équations différentielles $\mathrm{rot}\, F = 0$ et $\mathrm{div}\, F = 0$ car $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0$.
- On constate que sous des hypothèses topologiques, ces solutions évidentes sont toutes les solutions.
- On définit les *espaces de cohomologie de de Rham* de U :

$$\begin{aligned} H^0_{dR}(U) &= \ker \nabla, \\ H^1_{dR}(U) &= \ker \mathrm{rot}/\mathrm{Im}\nabla, \\ H^2_{dR}(U) &= \ker \mathrm{div}/\mathrm{Im}\,\mathrm{rot}, \\ H^3_{dR}(U) &= C^\infty(U,\mathbb{R})/\mathrm{Im}\,\mathrm{div}. \end{aligned}$$

Que constate-t-on ?

- Écrivons la suite :

$$0 \to C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty(U,\mathbb{R}) \to 0$$

- On a des solutions évidentes aux équations différentielles $\mathrm{rot}\, F = 0$ et $\mathrm{div}\, F = 0$ car $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0$.
- On constate que sous des hypothèses topologiques, ces solutions évidentes sont toutes les solutions.
- On définit les *espaces de cohomologie de de Rham* de U :

$$\begin{aligned} H^0_{dR}(U) &= \ker \nabla, \\ H^1_{dR}(U) &= \ker \mathrm{rot}/\mathrm{Im}\nabla, \\ H^2_{dR}(U) &= \ker \mathrm{div}/\mathrm{Im}\,\mathrm{rot}, \\ H^3_{dR}(U) &= C^\infty(U,\mathbb{R})/\mathrm{Im}\,\mathrm{div}. \end{aligned}$$

- Autrement dit $H^*_{dR}(U) =$ toutes les solutions / solutions évidentes.

On a donc vu :

On a donc vu :

- $H^0_{dR}(U)$ détecte les composantes connexes de U, c'est-a-dire, U a k composantes connexes si et seulement si $H^0_{dR}(U) = \mathbb{R}^k$.

On a donc vu :

- $H^0_{dR}(U)$ détecte les composantes connexes de U, c'est-a-dire, U a k composantes connexes si et seulement si $H^0_{dR}(U) = \mathbb{R}^k$.
- Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ simplement connexe, alors $H^1_{dR}(U) = \{0\}$.

On a donc vu :

- $H^0_{dR}(U)$ détecte les composantes connexes de U, c'est-a-dire, U a k composantes connexes si et seulement si $H^0_{dR}(U) = \mathbb{R}^k$.
- Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ simplement connexe, alors $H^1_{dR}(U) = \{0\}$.
- Ceci devient faux lorsque U n'est pas simplement connexe.

On a donc vu :

- $H^0_{dR}(U)$ détecte les composantes connexes de U, c'est-a-dire, U a k composantes connexes si et seulement si $H^0_{dR}(U) = \mathbb{R}^k$.
- Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ simplement connexe, alors $H^1_{dR}(U) = \{0\}$.
- Ceci devient faux lorsque U n'est pas simplement connexe.
- Si U ouvert de $\mathbb{R}^3$ étoilé, alors $H^2_{dR}(U) = \{0\}$.

On a donc vu :

- $H^0_{dR}(U)$ détecte les composantes connexes de U, c'est-a-dire, U a k composantes connexes si et seulement si $H^0_{dR}(U) = \mathbb{R}^k$.
- Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ simplement connexe, alors $H^1_{dR}(U) = \{0\}$.
- Ceci devient faux lorsque U n'est pas simplement connexe.
- Si U ouvert de $\mathbb{R}^3$ étoilé, alors $H^2_{dR}(U) = \{0\}$.
- On peut avoir des ouverts simplement connexes mais avec $H^2_{dR}(U) \neq \{0\}$. Par exemple $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Homologie singulière

- On veut comprendre l'autre des deux objets intervenant dans le théorème de de Rham : l'homologie singulière.

Homologie singulière

- On veut comprendre l'autre des deux objets intervenant dans le théorème de de Rham : l'homologie singulière.
- (En fait on verra une version particulière de cette théorie : l'homologie simpliciale.)

Homologie singulière

- On veut comprendre l'autre des deux objets intervenant dans le théorème de de Rham : l'homologie singulière.
- (En fait on verra une version particulière de cette théorie : l'homologie simpliciale.)
- On va expliquer cette théorie dans le cas des surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$.

Homologie singulière

- On veut comprendre l'autre des deux objets intervenant dans le théorème de de Rham : l'homologie singulière.
- (En fait on verra une version particulière de cette théorie : l'homologie simpliciale.)
- On va expliquer cette théorie dans le cas des surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$.
- Idée : approcher une surface par des triangles.

Homologie singulière

- Un k-simplexe est un sommet si $k = 0$, une arête si $k = 1$, un triangle si $k = 2$ ou un tétraèdre si $k = 3$.

Homologie singulière

- Un k-simplexe est un sommet si $k = 0$, une arête si $k = 1$, un triangle si $k = 2$ ou un tétraèdre si $k = 3$.
- Soit S une surface "recouverte par des triangles".

Homologie singulière

- Un k-simplexe est un sommet si $k = 0$, une arête si $k = 1$, un triangle si $k = 2$ ou un tétraèdre si $k = 3$.
- Soit S une surface "recouverte par des triangles".
- Notons $C_k(S)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble des k-simplexes de S, ses éléments sont appelés des k-chaînes.

Homologie singulière

- Un k-simplexe est un sommet si $k = 0$, une arête si $k = 1$, un triangle si $k = 2$ ou un tétraèdre si $k = 3$.
- Soit S une surface "recouverte par des triangles".
- Notons $C_k(S)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble des k-simplexes de S, ses éléments sont appelés des k-chaînes.
- L'opérateur bord $\partial_k : C_k(S) \to C_{k-1}(S)$ envoie un k-simplexe sur la somme des $(k-1)$-simplexes qui conforment son bord.

Homologie singulière

- On a $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$.

Homologie singulière

- On a $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$.
- C'est-à-dire : un bord n'a pas de bord !

Homologie singulière

- On a $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$.
- C'est-à-dire : un bord n'a pas de bord !
- Lorsqu'une k-chaîne σ vérifie $\partial_k(\sigma) = 0$, elle est susceptible d'être un bord.

Homologie singulière

- On a $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$.
- C'est-à-dire : un bord n'a pas de bord !
- Lorsqu'une k-chaîne σ vérifie $\partial_k(\sigma) = 0$, elle est susceptible d'être un bord.
- Lorsque σ est un bord, il remplit un trou. Et s'il vérifie $\partial_k(\sigma) = 0$ mais il n'est pas le bord de personne... ça veut dire que S a un trou !

Homologie singulière

- On a $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$.
- C'est-à-dire : un bord n'a pas de bord !
- Lorsqu'une k-chaîne σ vérifie $\partial_k(\sigma) = 0$, elle est susceptible d'être un bord.
- Lorsque σ est un bord, il remplit un trou. Et s'il vérifie $\partial_k(\sigma) = 0$ mais il n'est pas le bord de personne... ça veut dire que S a un trou !
- On définit l'homologie simpliciale $H_k(S, \mathbb{R}) = \ker \partial_k / \mathrm{Im}\, \partial_{k+1}$.

Homologie singulière

- On a $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$.
- C'est-à-dire : un bord n'a pas de bord !
- Lorsqu'une k-chaîne σ vérifie $\partial_k(\sigma) = 0$, elle est susceptible d'être un bord.
- Lorsque σ est un bord, il remplit un trou. Et s'il vérifie $\partial_k(\sigma) = 0$ mais il n'est pas le bord de personne... ça veut dire que S a un trou !
- On définit l'homologie simpliciale $H_k(S, \mathbb{R}) = \ker \partial_k / \mathrm{Im}\, \partial_{k+1}$.
- Autrement dit :

$$\begin{aligned} H_*(S, \mathbb{R}) &= \text{chaînes qui peuvent être des bords / bords} \\ &= \text{potentiels trous / trous remplis} \\ &= \text{vrais trous.} \end{aligned}$$

Homologie singulière

- Les espaces des chaînes $C_k(S)$ dépendent de la triangulation de notre surface. Cependant les espaces $H_k(S, \mathbb{R})$ ne dépendent que de S.

Homologie singulière

- Les espaces des chaînes $C_k(S)$ dépendent de la triangulation de notre surface. Cependant les espaces $H_k(S, \mathbb{R})$ ne dépendent que de S.
- Les espaces ainsi construits sont en fait invariants par équivalence d'homotopie : si on déforme notre surface S de façon continue "sans la casser", les espaces $H_k(S, \mathbb{R})$ ne changent pas !

Théorème de de Rham

- Théorème de de Rham : Soit M une variété lisse. La cohomologie de de Rham de M coïncide avec le dual de l'homologie singulière de M.

Théorème de de Rham

- Théorème de de Rham : Soit M une variété lisse. La cohomologie de de Rham de M coïncide avec le dual de l'homologie singulière de M.
- Autrement dit, le défaut au théorème fondamental de l'analyse correspond exactement aux "trous" de la variété M.

Théorème de de Rham

- Théorème de de Rham : Soit M une variété lisse. La cohomologie de de Rham de M coïncide avec le dual de l'homologie singulière de M.
- Autrement dit, le défaut au théorème fondamental de l'analyse correspond exactement aux "trous" de la variété M.
- En particulier, la cohomologie de de Rham est un invariant d'homotopie.

- Calcul de la cohomologie des sphères $\mathbb{S}^n$:

$$H^k_{dR}(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, n. \end{cases}$$

Cohomologie de de Rham : applications

- Calcul de la cohomologie des sphères $\mathbb{S}^n$:

$$H^k_{dR}(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, n. \end{cases}$$

- Si $n \neq m$, alors $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^m$.

Merci pour votre attention !