Explique-moi...
l'approximation rationnelle de sous-espaces vectoriels

Plan

1. Approximation diophantienne "classique"
2. Généralisation de l'approximation diophantienne à des sev
3. Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Approximation diophantienne "classique"

$\xi \in \mathbb{R}$, $p/q \in \mathbb{Q}$

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \text{ petit ?}$$

Approximation diophantienne ”classique”

On lie la **complexité** du rationnel à la **qualité** de l’approximation.

Approximation diophantienne "classique"

$\xi \in \mathbb{R}$, $p/q \in \mathbb{Q}$

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{K}{q^{\alpha}}$$

Approximation diophantienne ”classique”

$\xi \in \mathbb{R}$, $p/q \in \mathbb{Q}$

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{K}{q^{\alpha}}$$

On lie la **complexité** du rationnel à la **qualité** de l'approximation.

Approximation diophantienne "classique"

On appelle **mesure d'irrationalité** le plus grand α tel que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{K}{q^\alpha}$$

pour une infinité de $p/q \in \mathbb{Q}$.

But : Par analogie, on veut "approcher" un sous-espace A (de dimension d) de $\mathbb{R}^n$, par un sous-espace B (de dimension e) *rationnel* et "pas trop compliqué".

Généralisation de l'approximation diophantienne à des sev

Par analogie à "$\xi \notin \mathbb{Q}$", on suppose

$$\forall B \text{ rationnel}, \quad A \cap B = \{0\}.$$

On cherche comme avant les $\alpha > 0$ tels que

$$\exists \infty \text{té } B \text{ rationnels}, \quad \psi(A, B) \leq \frac{K}{H(B)^\alpha}.$$

Où :

- ψ mesure la **proximité** entre A et B,
- $H(\cdot)$ mesure la **complexité** de B.

Généralisation de l'approximation diophantienne à des sev

$$\exists \infty \text{té } B \text{ rationnels,} \quad \psi(A,B) \leq \frac{K}{H(B)^{\alpha}} \qquad (1)$$

On définit par analogie à la mesure d'irrationalité une quantité :

$$\hat{\mu}_n(d|e) = \sup\{\alpha \text{ vérifiant (1)} \quad \forall A^d\}.$$

Théorème (Schmidt, 1967)

On a

$$\frac{d(n-1)}{(n-d)(n-e)} \leq \hat{\mu}_n(d|e) \leq \left\lceil \frac{e(n-e)+1}{n+1-d-e} \right\rceil.$$

De plus, le problème est totalement résolu si $\min(d,e)=1$*, et dans ce cas*

$$\hat{\mu}_n(d|e) = \frac{n}{n+1-d-e}.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

On sait que

$$3 \leq \hat{\mu}_4(2|2) \leq 5.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Nous allons montrer que $\hat{\mu}_4(2|2) = 3$, pour cela nous allons construire A un plan de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{cases} \forall B \text{ plan rationnel}, \quad A \cap B = \{0\}, \\ \exists c > 0, \quad \forall B \text{ plan rationnel}, \quad \psi(A, B) \geq \dfrac{c}{H(B)^3}. \end{cases}$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Notons A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 engendré par

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Commençons par vérifier la condition d'irrationalité : tout plan rationnel B de $\mathbb{R}^4$ vérifie $A \cap B = \{0\}$.

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Les **coordonnées de Plücker** $\eta_1, \ldots, \eta_6 \in \mathbb{Z}$ d'un plan de $\mathbb{R}^4$ vérifient

$$\eta_1\eta_6 - \eta_2\eta_5 + \eta_3\eta_4 = 0.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Si on suppose qu'on a B tel que $A \cap B \neq \{0\}$, alors on peut montrer que

$$(\eta_3 + \eta_4)\sqrt{5} + (\eta_5 - \eta_2)\sqrt{2} + \eta_6 - 7\eta_1 = 0.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

$$(\eta_3 + \eta_4)\sqrt{5} + (\eta_5 - \eta_2)\sqrt{2} + \eta_6 - 7\eta_1 = 0$$

Or

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})) = 3$$

donc

$$\begin{cases} 7\eta_1 = \eta_6 \\ -\eta_3 = \eta_4 \\ \eta_2 = \eta_5. \end{cases}$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Ainsi toutes nos équations deviennent

$$7\eta_1^2 = \eta_2^2 + \eta_3^2$$

qui n'a pas de solution rationnelle non nulle.

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Avec (X_1, X_2) base de B, (Y_1, Y_2) base de A et M la matrice formée de tous ces vecteurs, on a

$$\psi(A, B) \geq \frac{\mathrm{Volume}_4(X_1, X_2, Y_1, Y_2)}{\mathrm{Volume}_2(Y_1, Y_2)\mathrm{Volume}_2(X_1, X_2)} = |\det M| \frac{c_1}{H(B)}.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

On a

$$\det M = (\eta_3 + \eta_4)\sqrt{5} + (\eta_5 - \eta_2)\sqrt{2} + \eta_6 - 7\eta_1$$

or un théorème de Schmidt permet de montrer que

$$\forall q = (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall c \in \mathbb{Z}, \quad |a\sqrt{5} + b\sqrt{2} + c| \geq c_2 \|q\|^{-2+\epsilon}.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

On a

$$H(B) = \|(\eta_1, \ldots, \eta_6)\|.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Finalement,

$$\det M = (\eta_3 + \eta_4)\sqrt{5} + (\eta_5 - \eta_2)\sqrt{2} + \eta_6 - 7\eta_1$$

$$\forall q = (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall c \in \mathbb{Z}, \quad |a\sqrt{5} + b\sqrt{2} + c| \geq c_2 \|q\|^{-2+\epsilon}$$

$$H(B) = \|(\eta_1, \ldots, \eta_6)\|$$

permet de montrer

$$\det M \geq c_2 \frac{1}{H(B)^{2+\epsilon}}.$$

Enfin,

$$\psi(A, B) \geq |\det M| \frac{c_1}{H(B)} \geq c_3 \frac{1}{H(B)^{3+\epsilon}}.$$

Un exemple dans $\mathbb{R}^4$

On a donc montré que

$$\hat{\mu}_4(2|2) \leq 3,$$

soit

$$\hat{\mu}_4(2|2) = 3.$$

Conclusion

Il y a deux points clefs dans le cas de $\mathbb{R}^4$:

1. **Trouver un espace A suffisamment compliqué** pour qu'il n'intersecte aucun B rationnel, *i.e.* tel qu'il n'existe pas de solution non nulle rationnelle à l'équation qu'on obtient.
2. **Trouver un espace A suffisamment simple** pour qu'il soit mal approché par les rationnels et obtenir ainsi une majoration intéressante.

Peut-on traiter d'autres cas ainsi ?

$$\zeta = -\frac{112\,\xi^4 - 196\,\xi^3 - \left(42\,\sqrt{2}\xi^3 - 17\,\sqrt{2}\xi^2 + 13\,\sqrt{2}\xi\right)\sqrt{4\,\xi - 5}\sqrt{\xi - 1} + 88\,\xi^2 - 30\,\xi + 6}{4\left(10\,\xi^4 - 7\,\xi^3 - \left(4\,\sqrt{2}\xi^3 + 3\,\sqrt{2}\xi^2 + \sqrt{2}\right)\sqrt{4\,\xi - 5}\sqrt{\xi - 1} - 10\,\xi^2 + 5\,\xi - 2\right)}$$

où

$$[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] \geq 17$$

permet de montrer

$$\hat{\mu}_5(3|2) \;\leq 6.$$

Merci !