Explique-moi... l'approximation rationnelle de sous-espaces vectoriels

Notes

Elio Joseph

22 janvier 2020

Références :

- On height of algebraic subspaces and diophantine approximation, W. M. Schmidt, 1967.
- Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, W. M. Schmidt, 1970.

Nous allons ici parler d'approximation diophantienne, domaine qui cherche à obtenir des résultats *qualitatifs* sur l'approximation de réels par des rationnels.
Que signifie *qualitatif* ? Assez naturellement, on peut dire que $22/7$ est une "meilleure" approximation de π que $157/50$, alors que ces deux approximations donnent le même nombre de décimales correctes (3).
Pour avoir une présentation du domaine de l'approximation diophantienne en général, cf les notes de l'exposé saison 2018-2019. Ici nous allons surtout parler d'approximation rationnelle de sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$.
L'exposé qui suit est peu formel et a surtout pour objectif de présenter les grandes idées de la théorie. L'exposé se compose deux parties :

1. Généralisation de l'approximation diophantienne classique à des sev de $\mathbb{R}^n$
2. Le cas de $\mathbb{R}^4$
3. Conclusion

---

1 Généralisation de l'approximation diophantienne classique à des sev de $\mathbb{R}^n$

1.1 L'approximation diophantienne classique

En approximation diophantienne classique, on veut approcher un réel ξ par un rationnel p/q. Autrement dit, on veut

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \quad \text{petit.}$$

Mais comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, le problème n'est pas intéressant en l'état. On lie donc la *complexité* du rationnel à la *qualité* de l'approximation. Ainsi, plus on s'autorisera des fractions *compliquées* (*i.e.* avec un grand dénominateur), plus on imposera à l'approximation d'être *précise*.
Plus précisément, on cherche p/q, α et K tels que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{K}{q^\alpha}. \tag{1}$$

$\rightarrow$ on voit bien ici que plus le dénominateur est grand, plus l'approximation se doit d'être précise.
$\rightarrow$ On appelle *mesure d'irrationalité* de ξ la borne supérieure des α vérifiant (1) pour une infinité de rationnels p/q ($\mu(\xi) = 2$ pour presque tout réel au sens de Lebesgue, $\mu(\xi) = 2$ si ξ est irrationnel algébrique (Roth 1955 - médaille Fields 1958), et plein d'autres choses à dire là-dessus)

1.2 Généralisation du problème à des sous-espaces vectoriels

L'idée est de W. M. Schmidt (1967).

But : Par analogie, on peut "approcher" un sous-espace A (de dimension d) de $\mathbb{R}^n$, par un sous-espace B (de dimension e) *rationnel* et "pas trop compliqué".

Par analogie à "$\xi \notin \mathbb{Q}$", on suppose

$$\forall B \text{ rationnel}, \quad A \cap B = \{0\}.$$

On cherche comme avant les $\alpha > 0$ tels que

$$\exists \infty\text{té } B \text{ rationnels}, \quad \psi(A, B) \leqslant \frac{K}{H(B)^\alpha}. \tag{2}$$

Où :

⋆ ψ mesure la *proximité* entre A et B,

⋆ $H(\cdot)$ mesure la *complexité* de B.

Plus précisément, on a $\psi(A,B) = \sin(\text{angle géométrique entre } A \text{ et } B)$, et $H(B) =$ volume de la maille du sous-réseau de $\mathbb{Z}^n$ inclus dans B.

On définit par analogie à la mesure d'irrationalité une quantité :

$$\hat{\mu}_n(d|e) = \sup\{\alpha \text{ vérifiant } (2) \quad \forall A^d\}.$$

1.3 Ce que l'on sait

Théorème 1 (Schmidt, 1967) On a

$$\frac{d(n-1)}{(n-d)(n-e)} \leqslant \hat{\mu}_n(d|e) \leqslant \left\lceil \frac{e(n-e)+1}{n+1-d-e} \right\rceil.$$

De plus, le problème est totalement résolu si $\min(d,e) = 1$, et dans ce cas

$$\hat{\mu}_n(d|e) = \frac{n}{n+1-d-e}.$$

La détermination de $\mu_n(e,j,d)$ est donc encore un problème largement ouvert. Sa valeur exacte n'est connue que quand on cherche à approcher des droites, ou à approcher par des droites (c'est le cas $\min(d,e) = 1$).

2 Le cas de $\mathbb{R}^4$

Le seul cas qui reste encore ouvert dans $\mathbb{R}^4$ est le cas $d = e = 2$, *i.e.* approcher un plan de $\mathbb{R}^4$ par une infinité de plans rationnels.
D'après ce qu'on a dit, on a

$$3 \leqslant \hat{\mu}_4(2|2) \leqslant 5.$$

Nous allons montrer que $\hat{\mu}_4(2|2) = 3$, pour cela nous allons construire A un plan de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{cases} \forall B \text{ plan rationnel}, \quad A \cap B = \{0\}, \\ \exists c > 0, \quad \forall B \text{ plan rationnel}, \quad \psi(A,B) \geqslant \dfrac{c}{H(B)^3}. \end{cases}$$

Notons A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 engendré par

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Commençons par vérifier la condition d'irrationalité : tout plan rationnel B de $\mathbb{R}^4$ vérifie $A \cap B = \{0\}$.

Soit B un sous-espace vectoriel rationnel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.
Notons $(\eta_1, \dots, \eta_6) \in \mathbb{R}^6$ un représentant des coordonnées de Plücker de B (*i.e.* le vecteur de $\mathbb{R}^6$ des mineurs de taille 2 d'une base de B). Ce vecteur vérifie donc la relation de Plücker

$$\eta_1\eta_6 - \eta_2\eta_5 + \eta_3\eta_4 = 0. \tag{3}$$

Comme B est un sous-espace rationnel, il admet une base rationnel (X_1, X_2). Quitte à choisir les η_i associés à la base (X_1, X_2), on peut supposer que $(\eta_1, \dots, \eta_6) \in \mathbb{Q}^6$. Quitte à multiplier par un rationnel, on peut supposer que $(\eta_1, \dots, \eta_6) \in \mathbb{Z}^6$ et que $\mathrm{pgcd}(\eta_1, \dots, \eta_6) = 1$.

Notons $M \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice

$$M := \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & X_1 & X_2 \end{pmatrix}$$

définie par colonnes. On remarque que

$$A \cap B = \{0\} \iff \det M \neq 0.$$

On calcule alors le déterminant de M par un développement de Laplace, et on trouve

$$\det M = (\eta_3 + \eta_4)\sqrt{5} + (\eta_5 - \eta_2)\sqrt{2} + \eta_6 - 7\eta_1.$$

Supposons par l'absurde que $\det M = 0$.
On a donc

$$(\eta_3 + \eta_4)\sqrt{5} + (\eta_5 - \eta_2)\sqrt{2} + \eta_6 - 7\eta_1 = 0,$$

or

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})) = 3$$

et $\eta_1, \dots, \eta_6 \in \mathbb{Z}$, donc

$$\begin{cases} 7\eta_1 = \eta_6 \\ -\eta_3 = \eta_4 \\ \eta_2 = \eta_5. \end{cases} \tag{4}$$

Ainsi, la relation (3) de Plücker devient

$$7\eta_1^2 = \eta_2^2 + \eta_3^2,$$

équation dont la seule solution rationnelle est $(0, 0, 0)$, ce qui est absurde, donc $A \cap B = \{0\}$ et la condition d'irrationalité est bien vérifiée.

On peut désormais montrer un fait (qu'on admet ici) :

$$\psi(A, B) \geqslant \frac{\mathrm{Volume}_4(X_1, X_2, Y_1, Y_2)}{\mathrm{Volume}_2(Y_1, Y_2)\mathrm{Volume}_2(X_1, X_2)} = |\det M| \frac{c_1}{H(B)}$$

où $c_1 > 0$ est une constante ne dépendant que de A (et non de B).
On rappelle que

$$\det M = (\eta_3 + \eta_4)\sqrt{5} + (\eta_5 - \eta_2)\sqrt{2} + \eta_6 - 7\eta_1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})$ est $\mathbb{Q}$-libre et que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ sont algébriques, on peut déduire rapidement d'un théorème de W. M. Schmidt qu'il existe $c_2 > 0$ telle que

$$\forall q = (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall c \in \mathbb{Z}, \quad \left|a\sqrt{5} + b\sqrt{2} + c\right| \geqslant c_2 \left\|q\right\|^{-2+\varepsilon}.$$

On admet un autre fait :

$$H(B) = \|\eta\| = \|(\eta_1, \ldots, \eta_6)\|.$$

On remarque alors que pour $q = (\eta_3 + \eta_4, \eta_5 + \eta_2)$, on a$\|q\| \leqslant \sqrt{5}\,\|\eta\|$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ et tout plan rationnel B, on a

$$\begin{aligned}\psi(A, B) &\geqslant c_3\ \frac{1}{H(B)^{2+\varepsilon}}\frac{1}{H(B)} \\ &= c_3\frac{1}{H(B)^{3+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\hat{\mu}_4(2|2) \leqslant 3,$$

et donc

$$\hat{\mu}_4(2|2) = 3.$$

3 Conclusion

Il y a deux points clefs dans le cas de $\mathbb{R}^4$:

1. Trouver un espace A suffisamment compliqué pour qu'il n'intersection aucun B rationnel, *i.e.* tel qu'aucune solution non nulle rationnelle aux équations de Plücker ne puisse annuler le déterminant de la matrice M.
2. Trouver un espace A suffisamment simple pour qu'il soit mal approché par les rationnels et obtenir ainsi une majoration intéressante.

C'est donc tout l'équilibre entre ces deux contraintes qui rend le problème intéressant.
Dans la même idée, on pourrait montrer que $\hat{\mu}_5(3|2) \leqslant 6$ avec des nombres algébriques de degré 34.