**Propriétés qualitatives de solutions d'équations aux dérivées partielles non-linéaires: Prolongement unique et applications**(M. Léautaud, 24h, 3ECTS, cours à Orsay)

Il s'agit d'un cours avancé dont l'objectif est de présenter quelques résultats de prolongement unique pour les solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires. On expliquera une méthode très générale qui repose sur des estimées d'énergie à poids, appelées inégalités de Carleman. On donnera de nombreuses applications comme une estimation de l'effet tunnel pour les fonctions propres du Laplacien, la contrôlabilité de l'équation de la chaleur, ou la contrôlabilité approchée de l'équation des ondes.

Les notions suivantes seront abordées:

- Inégalités de Carleman pour les opérateurs elliptiques et prolongement unique;
- Application aux sommes de fonctions propres et à la contrôlabilité de l'équation de la chaleur;
- Théorème de Hörmander pour les opérateurs à coefficients réels;
- Prolongement unique pour l'équation des ondes;
- Application à la pénétration des ondes dans l'ombre d'obstacles, et à la contrôlabilité approchée de l'équation des ondes;

**Optimal Transport**(Q. Mérigot, 24h, 3ECTS, cours à Orsay)

The theory of optimal transport has undergone great developments in the past 20 years, both because its elementary -yet very general - features and because of the connection it established between very different branches of mathematics. We will cover some geometric applications (convex surfaces with prescribed Gaussian curvature, antenna reflector design, geometry of the Wasserstein space) and some analytical ones (Monge-Ampre equation, Euler's equation, gradient flows in Wasserstein space). The course will also cover the discretization and numerical resolution of optimal transport problems, with some of these applications in mind.

References

1. C. Villani, Topics in optimal transportation, American Mathematical Society 2003.

2. C. Villani, Optimal transport. Old and new, Springer 2009.

3. L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savare, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures, Birkhauser 2008.

4. F. Santambrogio, Optimal Transport for Applied Mathematicians, Birkhauser 2015

5. C. Gutierrez, The Monge-Ampre equation, Birkhauser 2001

**Modèles cinétiques**(F. Golse, 24h, 3ECTS, cours à l'Ecole Polytechnique)

Ce cours est une introduction à l'analyse mathématique des modèles de la théorie cinétique des gaz ou des plasmas.

- L'équation de transport:
  - méthode des caractéristiques
  - lemmes de moyenne
  - lemmes de dispersion
- Les équations de champ moyen pour les plasmas:
  - la limite de champ moyen pour les systèmes de particules avec interaction lipschitzienne (d'après Neunzert-Wick, Braun-Hepp, Dobrushin)
  - le modèle de Vlasov-Poisson: existence, unicité et régularité en dimension 3 (d'après Pfaffelmoser, Lions-Perthame)
  - le modèle de Vlasov-Maxwell: existence globale de solutions renormalisées (d'aprs DiPerna-Lions); le critère de rgularité de Glassey-Strauss
  - l'amortissement Landau (d'après Caglioti-Maffei et Mouhot-Villani)

Références:


1 H. Brezis: "Analyse fonctionnelle et applications"; Masson, Paris, 1983.
2 F. Golse: "Distributions, analyse de Fourier, équations aux drivées partielles", Ecole polytechnique, 2011
3 C. Zuily: "Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles", Dunod, Paris, 2002.
4 F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti: "Kinetic equations and asymptotic theory"; B. Perthame et L. Desvillettes eds, Series in Applied Mathematics (Paris), 4. Gauthier-Villars, Editions Scientifiques et Mdicales Elsevier, Paris, 2000.
5 R.T. Glassey: "The Cauchy problem in kinetic theory". Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
6 F. Golse: On the Dynamics of Large Particle Systems in the Mean Field Limit; preprint arxiv 1301.5494.


Notes de cours : http://www.math.polytechnique.fr/ golse/M2.html

**Introduction aux problèmes inverses**(O. Kavian, 24h, 3ECTS, cours à Orsay)

Description:

Dans un grand nombre de problèmes ayant leur origine en physique, mécanique, géologie, économie ou médecine, on souhaite résoudre des équations aux dérivées partielles où apparaissent un ou plusieurs coefficients inconnus. On procède alors à des mesures partielles (par exemple sur le bord d?un ouvert) de certaines quantités, en espérant retrouver les paramètres inconnus. Par exemple en gravimétrie et en prospection géologique, en effectuant des mesures de l'accélération de gravité $g$ à une certaine altitude, on souhaite retrouver la densité de certaines couches de l?corce terrestre. En tomographie par impédance électrique, en mesurant l'intensité et le potentiel électriques à la surface du corps humain, on souhaite donner des informations sur la résistivité des tissus se trouvant  l'intérieur du corps. D'un point de vue mathématique ces problèmes se ramènent à la question de déterminer des coefficients de certains opérateurs différentiels agissant sur des fonctions définies sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$ , en supposant que l'on dispose d'informations liant les fonctions définies sur la frontière $\partial\Omega$ à travers l'opérateur différentiel. Dans le cours que nous présenterons nous donnerons quelques exemples de ce type de problèmes et nous les tudierons d'un point de vue théorique, et quand cela est possible d'un point de vue pratique.

Contenu:

- Exemples(gravimétrie,prospection géologique,transformée de Radon et tomographie, équation de la chaleur rétrograde, problème inverse spectral)
- Problèmes mal posés et approximation numérique
- Problèmes elliptiques (détermination de potentiel, détermination de coefficients de diffusion)
- Problème spectral inverse pour l'opérateur de Sturm-Liouville
- Détermination de coefficients avec les données spectrales de frontière
- Détermination de coefficients dans les problèmes paraboliques
- Détermination de coefficients dans l'équation des ondes
- Equation de Helmholtz et problèmes de inverse scattering (milieux hétérogènes, obstacles)

Bibliographie:

- Otared Kavian : Introduction  la thorie des points critiques et applications aux problmes elliptiques, chapitre 1; Springer-Verlag, 1993.
- Otared Kavian : Four lectures on parameter identification, in Three Courses on Partial Differential Equations, pp. 125?162, IRMA Lect.Math. Theor. Phys., 4, de Gruyter, Berlin, 2003.
- Andreas Kirsch : An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Applied Math. Sciences, vol. 120, Springer, New York, 1996.
- Kosaku Yosida : Functional Analysis, ditions Springer-Verlag, 1980.

**Contrôle géométrique**(U. Boscain, Y. Chitour, F. Jean, 24h, 3ECTS, cours à Orsay)

Description:

Le but de ce cours est de fournir une introduction à la théorie du contrôle avec le point de vue géométrique, c'est-à-dire en utilisant les outils de la géométrie différentielle. Le cours est divisé en deux parties. Dans la première, on tudiera la gométrie de familles de systèmes dynamiques, exhibant en particulier la structure de l'ensemble des trajectoires. Dans la seconde partie, nous traiterons de la théorie du contrôle optimal, en mettant l'accent sur le Principe du Maximum de Pontryagin et sa géométrie sous-jacente, en connexion avec les propriétés des opérateurs hypoelliptiques.

Contenu:

- Controllability
- definition of control systems as families of dynamical systems
- structural properties
- Accessibility, Controllability and Stabilization
- Lie bracket, the Lie algebraic condition and the Brockett obstruction-Krener theorem, Chow theorem, the orbit theorem
- Poisson stability and recurrence
- Controllability for systems under the strong Hrmander condition and unbounded controls
- the Frobenius Theorem
- non-holonomic mechanics
- examples : Linear systems, control of satellites, rolling bodies, quantum systems ? Optimal Control
- The classical approach of the calculus of variations (Euler-Lagrange Equations)
- Legendre transformation and the Hamiltonian formalism
- existence of solutions : Filippov Theorem
- the general Statement of the Pontryagin Maximum Principle
- Singular trajectories and abnormal extremals
- Proof of the PMP in the case of systems affine in the control with quadratic cost
- Minimum time with bounded controls
- Sub-Riemannian geometry and the hypoelliptic Laplacian

Bibliographie:

- A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer-Verlag, 2004.

- V. Jurdjevic. Geometric Control Theory. Cambridge University Press, 1997.

- F. Jean. Control of Nonholonomic Systems : from Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning. Springer International Publishing, SpringerBriefs in Mathematics, 2014.