Aspects combinatoires de l'étude des invariants cohomologiques de groupes semi-simples

Joël Riou

11 juin 2015

Table des matières

Soit G un groupe algébrique semi-simple déployé sur un corps k. Soit T un tore maximal déployé de G. (Notons m la dimension de T : c'est le rang de G.). Soit W le groupe de Weyl. On rappelle que c'est le quotient N/T où N est le normalisateur de T dans G ; comme T est égal à son centralisateur, on a un plongement $W = N/T \to \mathrm{Aut}(T)$, donc W est un groupe fini constant et on peut remarquer que $W(k) \simeq N(k)/T(k)$ (le T-torseur $N \to N/T = W$ est trivial). Le but de l'exposé est de donner des outils pour étudier le conoyau de l'application suivante :

$$R(G) \overset{c_2}{\to} CH^2(BG) \to CH^2(BT)^W$$

où $R(G)$ est l'anneau des représentations de G, c'est-à-dire le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des représentations algébriques de G (les objets sont les morphismes $G \to \mathrm{GL}(V)$ où V est un k-espace vectoriel de dimension finie).

Le groupe $CH^2(BT)^W$ sera noté $Q(G)$ et l'image de $CH^2(BG)$ (ou de $R(G)$ car c_2 est surjectif) dans $Q(G)$ sera notée $\mathrm{Dec}(G)$. Le lien avec les invariants vient de l'isomorphisme $\mathrm{Inv}^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_{\mathrm{norm}} \simeq Q(G)/\mathrm{Dec}(G)$ quand G est simplement connexe (Rost). Cet énoncé se généralise sous la forme de l'énoncé d'une suite exacte longue dans laquelle apparaissent les groupes $\mathrm{Inv}^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))_{\mathrm{norm}}$ et $Q(G)/\mathrm{Dec}(G)$ dans le cas où G est un groupe semi-simples. Nous allons ici étudier les groupes $Q(G)$ et $\mathrm{Dec}(G)$ dans le cas semi-simple déployé.

(Cet exposé est basé principalement sur le texte *Degree three cohomological invariants of semisimple groups* de Merkurjev.)

1 Principe de scindage

1.1 Rappel sur les classes de Chern

Il existe une unique façon d'associer à chaque fibré vectoriel E sur un k-schéma lisse U des élements $c_i(E) \in CH^i(U)$ vérifiant les propriétés suivantes, où l'on a noté $c_t(E) := \sum_{i \geq 0} c_i(E) t^i \in CH^\star(U)[t]$.

— $c_t(E)$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré vectoriel E ;

— si $f\colon V \to U$ et E est un fibré sur U, on a $c_t(f^\star E) = f^\star(c_t(E))$.

— si $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ est une suite exacte courte de fibrés vectoriels, on a $c_t(E) = c_t(E')c_t(E'')$;

— si E est de rang 1, on a $c_t(E) = 1 + c_1(E)t$ où $c_1\colon \mathrm{Pic}(U) \xrightarrow{\sim} CH^1(U)$ est l'isomorphisme standard.

On peut en fait définir $c_t(x)$ où $x \in K_0(U)$ de façon à ce que $c_t([E]) = c_t(E)$ et $c_t(x+y) = c_t(x)c_t(y)$.

Si E est un fibré de rang constant sur U lisse, il existe $f\colon V \to U$ tel que $CH^\star(V) \to CH^\star(U)$ soit injectif ete que $f^\star E$ soit isomorphe à une somme directe de fibrés en droites.

1.2 Le morphisme canonique $R(G) \to K_0(BG)$

Proposition 1.2.1 *Soit U un schéma. Soit $r \geq 0$. Le foncteur qui à un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r sur U associe le GL_r-torseur des isomorphismes $\mathcal{E} \to \mathcal{O}^r$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang r sur U et $H^1(U, \mathrm{GL}_r)$.*

Si U est un variété algébrique munie d'un G-torseur étale $\mathcal{T}$, nous allons définir un morphisme $R(G) \to K_0(U)$.

Soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_r$ une représentation de G. L'image directe par ρ définit une application $H^1_{\text{ét}}(U,G) \to H^1(U, \mathrm{GL}_r)$. D'après la bijection ci-dessus, à la classe du G-torseur $\mathcal{T}$ on peut donc associer une classe d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang r sur E. On définit ainsi un morphisme $R(G) \to K_0(U)$. (Et ce morphisme est compatible avec les sommes directes, les produits tensoriels, la dualité et les puissances extérieures.)

Définition 1.2.2 *Totaro définit $K_0(BG)$ comme étant le limite projective des $K_0(U)$ pour $\mathcal{T} \to U$ parcourant un ensemble approprié de G-torseurs (que l'on ne précisera pas ici). On en déduit un morphisme canonique $R(G) \to K_0(BG)$.*

Remarque 1.2.3 *Totaro montre que le morphisme $R(G) \to K_0(BG)$ identifie $K_0(BG)$ au complété de l'anneau $R(G)$ par rapport à l'idéal d'augmentation. (Vrai pour tout groupe algébrique lisse G.)*

1.3 Calcul de $CH^\star(BT)$

Proposition 1.3.1 *« $B\mathbf{G}_{\mathrm{m}} \simeq \mathbf{P}^\infty$. »*

Pour tout $n \geq 0$. On fait agir $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ sur $\mathbf{A}^n$ par multiplication sur toutes les coordonnées. L'action est libre en dehors de l'origine et on peut déterminer la variété quotient $(\mathbf{A}^n - \{0\})/\mathbf{G}_{\mathrm{m}} \simeq \mathbf{P}^{n-1}$.

Corollaire 1.3.2 $CH^\star(B\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \simeq \mathbf{Z}[u]$ *où* $\deg u = 1$. Via *les identifications précédentes, $u = c_1(\mathcal{O}(1))$ et est aussi $c_1([\chi])$ où $\chi \colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ est le caractère tautologique de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$.*

On note $M := X(T)$ le groupe des caractère du tore déployé T. L'application $c_1 \colon M \to CH^1(BT)$ qui à un caractère χ associe $c_1([\chi])$ est un homomorphisme de groupes. On dispose donc d'un morphisme d'anneux induit $\operatorname{Sym}^\star M \to CH^\star(BT)$ (où l'algèbre symétrique est prise sur $\mathbf{Z}$). Ici, il faut penser à M comme étant noté additivement.

Corollaire 1.3.3 *Le morphisme canonique* $\operatorname{Sym}^\star M \to CH^\star(BT)$ *est un isomorphisme.*

(Cet isomorphisme vaut pour tout tore déployé et est fonctoriel en T.)

1.4 Les morphismes $R(G) \to R(T)^W$ et $CH^\star(BG) \to CH^\star(BT)^W$

Soit $w \in W$. On peut identifier w à un automorphisme de T et d'après ce qui précède, w est la restriction à T de l'automorphisme intérieur $\int_g$. Le morphisme $\mathrm{int}_g^\star \colon R(G) \to R(G)$ est l'identité. (En un certain sens, l'automorphisme de BG induit par int_g est homotope à l'identité dans la catégorie homotopique (non pointée) de Morel-Voevodsky.) L'automorphisme int_g agit donc aussi par l'identité sur $CH^\star BG$.

De ceci, on obtient l'existence des morphismes suivants :

$$R(G) \to R(T)^W \qquad CH^\star BG \to (CH^\star BT)^W$$

Théorème 1.4.1 *Le morphisme $R(G) \to R(T)^W$ est un isomorphisme.*

Ce théorème vaut pour tous les groupes réductifs déployés. Comme groupe abélien, $R(T)$ s'identifie au $\mathbf{Z}$-module libre engendré par les éléments de $M := X(T)$; pour tout $m \in M$, on note $e^m \in R(T)$ l'élément de base correspondant.

Plus précisément, $R(G)$ est l'algèbre du groupe discret M (qu'il faut alors penser comme étant noté multiplicativement...). Si $m_1, \dots, m_n$ est $\mathbf{Z}$-base de M, alors $R(G) \simeq \mathbf{Z}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_m, X_m^{-1}]$ où $X_i = e^{m_i}$. D'après la théorie des invariants, $R(G)$ est une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini.

Soit $P \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \dots,]$ est un polynôme en les classes de Chern (formellement), qui soit homogène de degré n (où $\deg c_i = i$), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} R(G) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & K_0(BG) \arrow[r, "P(c_1,\dots)"] \arrow[d] & CH^n(BG) \arrow[d] \\ R(T)^W \arrow[r] & K_0(BT)^W \arrow[r, "P(c_1,\dots)"] & CH^n(BT)^W \end{tikzcd}$$

Remarque 1.4.2 *Si $P = c_1^2 - 2c_2$, l'application $R(G) \to CH^2(BG)$ qui s'en déduit est un homomorphisme de groupes. (On peut faire de même en tout degré en utilisant les polynômes intervenant dans les relations de Newton.)*

Proposition 1.4.3 *Si E et F sont des fibrés vectoriels sur une variété lisse X sur k, on a les formules suivantes :*
- $c_1(E \oplus F) = c_1(E) + c_1(F) \in CH^1(X)$;
- $c_1(E \otimes F) = \operatorname{rg} F \cdot c_1(E) + \operatorname{rg} E \cdot c_1(F)$;
- $c_1(E^\vee) = -c_1(E)$;
- $c_1(\wedge^i E) = \binom{\operatorname{rg} E - 1}{i-1} c_1(E)$;
- $c_1(E) = c_1(\det E)$ *où* $\det E := \wedge^{\operatorname{rg} E} E$.

Par exemple, pour la formule pour les puissances extérieures, si E se décompose en $E \simeq L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$. Notons $x_i := c_1(L_i)$. On a un isomorphisme $\wedge^i E = \oplus_{I \subset \{1,\dots,r\}, \# I = i} (\otimes_{i \in I} L_i)$. On obtient ainsi que $c_1(\wedge^i E)$ est donné par une expression polynomiale en les $x_1, \dots, x_r$ qui est symétrique et homogène de degré 1. Il existe donc un entier a ne dépendant que du rang r tel aue $c_1(\wedge^i E) = a c_1(E)$. On peut calculer cet entier en considérant par exemple le cas particulier où $E = L^{\oplus r}$ où $L = O(1)$ sur $\mathbf{P}^n$ avec $n \neq 1$.

Proposition 1.4.4 *Soit r un entier naturel. Si E est un fibré vectoriel de rang r sur une variété lisse X sur k, on peut écrire $c_2(E^\vee)$ (resp. $c_2(\wedge^i E)$ pour tout i) sous la forme d'une combinaison linéaire de $c_2(E)$ et $c_1(E)^2$, et les coefficients de la formule ne dépendent que du rang E. En particulier, si $c_1(E) = 0$, les classes $c_2(E^\vee)$ et $c_2(\wedge^i E)$ appartiennent au sous-groupe de $CH^2(X)$ engendré par $c_2(E)$.*

De même, si E et F sont des fibrés vectoriels sur X (de rang constant) tels que $c_1(E) = c_1(F) = 0$, alors $c_2(E \otimes F)$ appartient au sous-groupe de $CH^2(X)$ engendré par $c_2(E)$ et $c_2(F)$.

Théorème 1.4.5 (Totaro) *(Ici, G est un groupe algébrique lisse quelconque.) L'anneau $K_0(BG)$ s'identifie au complété de l'anneau $R(G)$ par rapport à l'idéal d'augmentation.*

Corollaire 1.4.6 *Supposons que G est semi-simple. Alors, $CH^1(BG) = 0$. Soit $V_1, \ldots, V_n$ une famille de représentations de G dont les classes engendrent $R(G)$ comme λ-anneau avec dualité. Alors, le groupe abélien $CH^2(BG)$ est engendré par les $c_2(V_i)$: en particulier, c'est un groupe abélien de type fini.*

Ceci résulte du théorème de Totaro, du lien entre groupes de Chow en petite codimension et classes de Chern, ainsi que du lemme suivant, dans laquelle l'hypothèse que G est semi-simple est essentielle :

Lemme 1.4.7 *Soit V une représentation linéaire de G (semi-simple). Alors,* $\det(V)$ *est le caractère trivial.*

Ceci peut s'obtenir à partir de SGA 3 XXII 6.2.1 (i) qui décrit le groupe dérivé d'un groupe réductif.

1.5 Définitions

G semi-simple déployé.

Définition 1.5.1 *On note $Q(G) := CH^2(BT)^W \simeq (\operatorname{Sym}^2 M)^W$. On note $\operatorname{Dec}(G)$ l'image du morphisme $CH^2(BG) \to CH^2(BT)^W$. D'après ce qui précède, le groupe $\operatorname{Dec}(G)$ coïncide avec l'image de $c_2 \colon R(G) \to CH^2(BT)^W$, autrement dit à l'image du morphisme $c_2 \colon R(T)^W \to CH^2(BT)^W$ induite par l'application $c_2 \colon R(T) \to CH^2(BT)$ (qui, elle, n'est pas additive).*

Remarque 1.5.2 *Posons $B := CH^0(BT) \oplus CH^1(BT)t \oplus CH^2(BT)t^2 \simeq \mathbf{Z} \oplus M \cdot t \oplus (\operatorname{Sym}^2 M) \cdot t^2$ (t est une indéterminée) que l'on munit d'une structure d'anneau commutatif en imposant $t^3 = 0$. On considère l'application $M \to B^\times$ qui à $m \in M$ associe $1 + m \cdot t$. Ceci s'étent en un homomorphisme de groupes $c'_t \colon R(T) \simeq \mathbf{Z}[M] \to B$: c'est l'application qui à une classe de représentation associe son polynôme de Chern tronqué jusqu'à l'ordre 2. Ceci permet en principe de calculer $c_2 \colon R(T) \to CH^2(BT)$...*

Le quotient $Q(G)/\operatorname{Dec}(G)$ ne dépend que du groupe abélien M muni de l'action de W. On l'étudie plus en détail dans la deuxième partie.

2 Données radicielles

2.1 Les racines

On a noté $M := X(T)$ le groupe abélien des caractères de G. Notons $M^\star$ le groupe des cocaractères du tore T, c'est-à-dire des morphismes $\operatorname{Hom}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}, T)$. On identifie canoniquement $M^\star$ au dual $\operatorname{Hom}(M, \mathbf{Z})$ de M.

On considère la représentation adjointe de T sur $\mathfrak{g}$: $\operatorname{Ad} \colon T \to \operatorname{GL}(\mathfrak{g})$. Elle associe à t la différentielle en l'élément neutre de la conjugaison par t sur G.

Pour tout caractère $\alpha \in M = \operatorname{Hom}(T, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ de T, on note $\mathfrak{g}^\alpha$ la plus grande sous-représentation de $\mathfrak{g}$ sur laquelle T agit par multiplication par le caractère α.

Définition 2.1.1 *L'ensemble des racines $R \subset M$ est l'ensemble des $\alpha \in M$ tels que $\alpha \neq 0$ et $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$.*

On a donc une décomposition : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus (\oplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha)$. On a $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$ et pour tout $\alpha \in R$, le k-espace vectoriel $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1.

Définition 2.1.2 *On note $\Lambda_r \subset M$ le sous-groupe engendré par R.*

Si G est semi-simple, Λ_r est un sous-groupe d'indice fini de M : c'est le réseau des racines.

2.2 Les coracines

Pour chaque racine α, il existe un unique sous-schéma en groupe fermé U_α isomorphe au groupe additif $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ tel que $\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \mathfrak{g}^\alpha$.

Le sous-groupe fermé U_α est normalisé par T et on peut en fait plonger dans G le produit semi-directe de T et U_α où l'action par conjugaison T de $U_\alpha \simeq \mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ est donnée par le caractère α.

Plus précisément, on note $\underline{\mathfrak{g}^\alpha}$ le schéma en groupes vectoriel associé à la droite $\mathfrak{g}^\alpha$, on a un isomorphisme canonique $\exp \colon \underline{\mathfrak{g}^\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha$. Et on a la formule $t \exp(v_\alpha) t^{-1} = \exp(\alpha(t) \cdot v_\alpha)$.

Comme $\alpha \in R$, on a aussi $-\alpha \in R$. Les deux sous-groupes U_α et $U_{-\alpha}$ ne commutent pas. D'après SGA 3 XX 2, il existe un unique cocaractère $\alpha^\star \in M^\star$ (c'est la coracine associée à α) et un unique isomorphisme $\mathfrak{g}^\alpha \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\sim} k$ tel que si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ sont tels que $X \otimes Y$ est envoyé sur 1, on ait la formule suivante pour tous scalaires λ et μ tels que $1 + \lambda\mu$ soit inversible :

$$\exp\left(\frac{-\mu Y}{1+\lambda\mu}\right) \exp(\lambda X) \exp(\mu Y) \exp\left(\frac{-\lambda X}{1+\lambda\mu}\right) = \alpha^\star(1+\lambda\mu) \, .$$

On note $R^\star$ l'ensemble des coracines. On a une bijection $R \xrightarrow{\sim} R^\star$ qui à α associe $\alpha^\star$.

Si $\gamma \in M$ et $\delta^\star \in M^\star$, on note $(\delta^\star, \gamma)$ l'entier tel que $\gamma \circ \delta^\star \colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ soit l'élévation à cette puissance.

On a $(\alpha^\star, \alpha) = 2$, autrement dit $\alpha \circ \alpha^\star \colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ est l'élévation au carré.

Pour tout $\alpha \in R$, on note $s_\alpha \colon M \to M$ la symétrie définit par $s_\alpha(\beta) = \beta - (\alpha^\star, \beta)\alpha$. On a $s_\alpha(R) \subset R$ et si on note $s_{\alpha^\star} \colon M^\star \to M^\star$ le transposé de s_α, on a $s_{\alpha^\star}(R^\star) \subset R^\star$.

Le groupe de Weyl W s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{Aut}(M)$ engendré par les s_α (SGA 3 XXII 3.4).

Définition 2.2.1 *Le réseau des poids Λ_w est le sous-groupe de $M \otimes \mathbf{Q}$ formé des β tels que pour tout $\alpha^\star \in R^\star$, $(\alpha^\star, \beta) = 1$.*

On a les inclusions $\Lambda_r \subset M \subset \Lambda_w$. Si $\Lambda_r = M$, on dit que G est adjoint. Si $M = \Lambda_w$, on dit que G est simplement connexe.

2.3 Formes quadratiques invariantes

À partir de maintenant, on suppose que la donnée radicielle de G est irréductible.

On choisit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ un ensemble de racines simples de R.

On note $V := M \otimes \mathbf{Q}$ et $V^\star := M^\star \otimes \mathbf{Q}$.

Théorème 2.3.1 *À multiplication près par un scalaire, il existe une unique forme quadratique non nulle sur le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $V^\star$ et invariante par le groupe de Weyl W.*

Un forme quadratique sur $V^\star$ peut être décrite comme un élément de $\operatorname{Sym}^2 V$. On va s'intéresser ici plus précisément aux éléments de $\operatorname{Sym}^2 T$.

Définition 2.3.2 *La matrice de Cartan C de la duale de la donnée radicielle de G est la matrice $C = ((\alpha_i^\star, \alpha_j))_{i,j}$. On note D la matrice diagonale dont les coefficients sont les longueurs des coracines $\alpha_1^\star, \dots, \alpha_m^\star$.*

Proposition 2.3.3 *La matrice DC est symétrique à coefficients entiers, avec des entiers pairs sur la diagonale. Notons B la forme bilinéaire symétrique sur $V^\star$ dont la matrice soit DC dans la base formée par les coracines simples. Pour tout $v^\star \in V^\star$, notons $q(v^\star) := \frac{1}{2}B(v^\star, v^\star)$. On peut identifier q à un élément de $\operatorname{Sym}^2 \Lambda_w$ et q engendre le groupe abélien $(\operatorname{Sym}^2 \Lambda_w)^W$: on peut alors caractériser q en énonçant que si $\alpha^\star$ est une coracine courte, $q(\alpha^\star) = 1$.*

Ceci permet de décrire un générateur de $Q(G)$ quand $M = \Lambda_w$, c'est-à-dire quand G est simplement connexe.

On dispose d'une inclusion $(\operatorname{Sym}^2 \Lambda_r)^W \to (\operatorname{Sym}^2 \Lambda_w)^W = \mathbf{Z}q$ entre groupes isomorphes à $\mathbf{Z}$. Il existe un plus petit entier naturel non nul m tel que $mq \in (\operatorname{Sym}^2 \Lambda_r)^W$. Comme il est facile de montrer que la matrice de la forme bilinéaire symétrique B dans la base de $V^\star$ duale de celle des racines $\alpha \in \Delta$ est DC^{-1}, on a donc la proposition suivante :

Proposition 2.3.4 *Soit m le plus petit entier naturel non nul tel que mDC^{-1} soit à coefficient entiers et ait des entiers pairs sur la diagonale, alors mq est un générateur de $(\operatorname{Sym}^2 \Lambda_r)^W$.*

S'agissant des groupes $Q(G)$, cette proposition permet dans une certaine mesure de comprendre la situation des groupes adjoints à partir du cas des groupes simplement connexes.

3 Exemples de calculs

3.1 SL_n

(Système de racines A_{n-1}.)

Notons $\mathfrak{sl}_n$ l'algèbre de Lie de SL_n : c'est l'ensemble de matrices carrées de taille n et de trace nulle.

Notons T le tore maximal de SL_n formé des matrices diagonales de déterminant 1. On note $L_1, \ldots, L_n$ les éléments de la base canonique de $\mathbf{Z}^n$. Notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les n éléments de $M := X(T)$ tels pour tout $t \in T(A)$ (pour tout anneau A, par exemple A une clôture algébrique de k), on ait $t = \mathrm{Diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$. On considère le morphisme $\mathbf{Z}^n \to M$ qui à L_i associe λ_i. Ceci permet d'identifier M au quotient $\mathbf{Z}^n/\mathbf{Z}D$ où $D := (1, \ldots, 1)$.

Avec ces notations, les racines sont les caractères $\alpha = L_i - L_j$ pour $i \neq j$ et $\mathfrak{g}^\alpha$ est la droite engendrée par la matrice E_{ij}. Le groupe U_α associé est formé des matrices de la forme $1 + \lambda E_{ij}$ pour λ un scalaire. La coracine $\alpha^\star$ est le morphisme $\mathbf{G}_\mathrm{m} \to T$ qui à un scalaire inversible λ associe $\sum_{k\in\{1,\ldots,n\}-\{i,j\}} E_{k,k} + \lambda E_{i,i} + \lambda^{-1} E_{j,j}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $\alpha_i := L_i - L_{i+1}$. Les élements $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ constituent un ensemble de racines simples.

Dans l'algèbre symétrique de M, notons $X_i := e^{L_i}$. L'anneau $R(T)$ s'identifie à l'anneau $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]/(X_1 \ldots X_n - 1)$. Considérons $\mathcal{M}$ l'ensemble des monômes $X_1^{d_1} \ldots X_n^{d_n}$ tels que les d_i soient des entiers naturels qui ne soient pas tous nuls. On voit facilement que les classes des éléments de $\mathcal{M}$ constituent une base du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]/(X_1 \ldots X_n - 1)$. Comme $W = \mathfrak{S}_n$, en utilisant le théorème sur les polynômes symétriques, on obtient des isomorphismes d'anneaux $R(G) \simeq R(T)^W \simeq \mathbf{Z}[S_1, \ldots, S_{n-1}]$ où S_i est la i-ème fonction symétrique élémentaire des $X_1, \ldots, X_n$. (S_1 correspond à la représentation tautologique de SL_n et les $S_i = \lambda^i(S_1)$ en sont les puissances extérieures.) L'image $\mathrm{Dec}(G)$ du morphisme $c_2\colon R(\mathrm{SL}_n) \to (\mathrm{Sym}^2 M)^W$ est donc engendré par $c_2(S_1) = \sum_{i<j} X_i X_j$.

Dans $\mathrm{Sym}^2 V$, on a l'identité suivante :

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j \ .$$

On en déduit que si on pose $q := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i = -\sum_{i<j} X_i X_j$, alors $q \in \mathrm{Sym}^2 M$. Comme q est invariante par W et vérifie $q(\alpha_i^\star) = 1$, l'élément q est le générateur canonique de $(\mathrm{Sym}^2 M)^W$. Comme $c_2(S_1) = q$, on en déduit $Q(G) = \mathrm{Dec}(G) = \mathbf{Z}q$, d'où $Q(G)/\mathrm{Dec}(G) = 0$.

Dans cet exemple, $\Lambda_w = M$ (SL_n est simplement connexe) et Λ_r est un sous-groupe de Λ_w d'indice n. En utilisant la proposition 2.3.4, il est possible de montrer que dans le cas adjoint correspondant, on a aussi $Q(\mathrm{PGL}_n) = \mathrm{Dec}(\mathrm{PGL}_n)$.

3.2 PO_{2n}

(Système de racines D_n.)

Soit n un entier naturel multiple de 4.

On considère la forme quadratique $q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ en $2n$ variables sur un corps de caractéristique différente de 2. Dans le groupe orthogonal associé $O(q)$, on a le tore maximal déployé $\tilde{T}$ formé des matrices diagonales de la forme $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1})$. Le groupe $\mu_2 = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ se plonge dans $\tilde{T}$. On introduit le quotient $\mathrm{PO}(q) := \mathrm{O}(q)/\mu_2$. Le quotient $T := \tilde{T}/\mu_2 \subset \mathrm{PO}(q)$ est un tore maximal dans $\mathrm{PO}(q)$.

Notons $M := X(T)$ et $\tilde{M} := X(\tilde{T})$. L'application canonique $M \to \tilde{M}$ est injective. Pour tout i, notons $L_i \in \tilde{M}$ le caractère de $\tilde{T}$ qui à t associe λ_i avec les notations ci-dessus. Les éléments de $L_1, \dots, L_n$ forment une base de $\tilde{M}$ comme $\mathbf{Z}$-module. Le groupe M s'identifie au sous-groupe de $\tilde{M}$ formé des $\sum_{i=1}^n a_i L_i$ avec $a_i \in \mathbf{Z}$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i$ soit pair. On obtient un ensemble de racines simples $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ en posant $\alpha_i = L_i - L_{i+1}$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\alpha_n = X_{n-1} + X_n$. On a $\alpha_1^\star(t) = \mathrm{Diag}(t, t^{-1}, t^{-1}, t, 1, \dots, 1)$, $\alpha_2^\star(t) = \mathrm{Diag}(1, 1, t, t^{-1}, t^{-1}, t, 1, \dots, 1)$, etc, $\alpha_{n-1}^\star(t) = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, t, t^{-1}, t^{-1}, t)$ et $\alpha_n^\star(t) = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, t, t^{-1}, t, t^{-1})$.

Si $v = \sum_{i=1}^n a_i L_i$ avec $a_i \in \mathbf{Q}$ appartient à Λ_w, on a $\alpha_i^\star(v) \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire que $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, etc, $a_{n-1} - a_n$ et $a_{n-1} + a_n$ sont dans $\mathbf{Z}$. On en déduit que Λ_w / Λ_r est cyclique d'ordre deux engendré par $\frac{1}{2} L_1 + \dots + \frac{1}{2} L_n$.

Le générateur canonique de $(\mathrm{Sym}^2 \Lambda_w)^W$ est $q := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i^2$. Grâce à la proposition 2.3.4, comme $M = \Lambda_r$, le calcul de la matrice de Cartan et de son inverse, ainsi que l'hypothèse que n est multiple de 4 permettent de montrer que $Q(\mathrm{PO}(q)) = (\mathrm{Sym}^2 M)^W 2\mathbf{Z} q$.

Le morphisme $c_2 \colon R(G) \to Q(G)$ est étudié en détail dans le livre *Cohomological invariants in Galois Cohomology* de Garibaldi, Merkurjev et Serre dans le cas où G est simplement connexe. L'étude est suffisamment fine (II, Lemma 15.2) pour donner l'inclusion $\mathrm{Dec}(\mathrm{PO}(q)) \subset 4\mathbf{Z} q$ (certaines représentations du revêtement simplement connexe de $\mathrm{PO}(q)$ proviennent de $\mathrm{PO}(q)$ et d'autre non...).

Pour montrer que $\mathrm{Dec}(\mathrm{PO}(q)) = 4\mathbf{Z} q$ et donc que $Q(\mathrm{PO}(q)) / \mathrm{Dec}(\mathrm{PO}(q)) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, il suffit de calculer la deuxième classe de Chern de représentations bien choisies.

On pose $a := \sum_{i=1}^n (e^{2L_i} + e^{-2L_i}) \in \mathbf{Z}[M]^W \simeq R(G)$. Considéré comme une représentation du tore T, chaque terme $e^{2L_i} + e^{-2L_i}$ a une première classe de Chern nulle (puisque c'est $2L_i - 2L_i = 0 \in M$). Par conséquent, le c_2 de a est la somme des c_2 de chaque terme :

$$c_2(a) = \sum_{i=1}^n (-4L_i)^2 = -8q \; .$$

Posons maintenant, $b := \sum_{i<j} ((e^{L_i + L_j} + e^{-L_i - L_j}) + (e^{L_i - L_j} + e^{-L_i + L_j}))$ (une coquille s'est glissée dans l'article de Merkurjev dans la définition de b). Pour $i < j$, on a $c_1(e^{L_i + L_j} + e^{-L_i - L_j}) = c_1(e^{L_i - L_j} + e^{-L_i + L_j}) = 0$, donc $c_2((e^{L_i + L_j} + e^{-L_i - L_j}) + (e^{L_i - L_j} + e^{-L_i + L_j})) = -(L_i + L_j)^2 - (L_i - L_j)^2 = -2(L_i^2 + L_j^2)$. On en déduit $c_2(b) = -\sum_{i \neq j} (X_i^2 + X_j^2) = -2(n-1) \sum_{i=1}^n X_i^2 = -4(n-1) q \in \mathrm{Sym}^2 V$.

Le pgcd de 8 et $4(n-1)$ étant 4, il vient que $\mathrm{Dec}(\mathrm{PO}(q))$ contient $4\mathbf{Z} q$.

En conclusion, $Q(\mathrm{PO}(q)) = 2\mathbf{Z} q$, $\mathrm{Dec}(\mathrm{PO}(q)) = 4\mathbf{Z} q$ et $Q(\mathrm{PO}(q)) / \mathrm{Dec}(\mathrm{PO}(q)) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.