

## Regards croisés sur les séries de Poincaré et leurs applications

par Frédéric PAULIN

### 1. INTRODUCTION

Soient  $X$  un ensemble et  $\Gamma$  un groupe dénombrable agissant à gauche sur  $X$ . Un des moyens (utilisé en particulier pour les formes automorphes, voir par exemple [Sie, Iwa]) de construire des fonctions numériques  $\Gamma$ -invariantes sur  $X$  est le suivant : on considère un sous-groupe  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  et une application  $\Gamma_0$ -invariante  $f : X \rightarrow \mathbf{C}$  ; on introduit, lorsqu'elle converge absolument, la *série de Poincaré* (relative)  $P = P_{f, \Gamma, \Gamma_0}$  où, pour tout  $x \in X$ ,

$$P(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} f(\gamma x) = \sum_{\gamma \in \Gamma / \Gamma_0} f(\gamma^{-1}x),$$

où chaque somme porte sur un système de représentants des classes de  $\Gamma_0$  dans  $\Gamma$  (et ne dépend pas de son choix). On introduit aussi, pour  $g : X \rightarrow ]0, 1]$  une application  $\Gamma_0$ -invariante, la *série de Dirichlet* (relative)

$$P(x, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} f(\gamma x) g(\gamma x)^s$$

et on espère la finitude de son *abscisse de convergence* définie par

$$\inf \{s \in \mathbf{R} : \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} |f(\gamma x)| g(\gamma x)^s < +\infty\}.$$

Le but de ces notes n'est pas d'établir une hypothétique théorie générale des séries de Poincaré-Dirichlet, mais d'expliquer trois exemples de situations où des considérations de telles sommes sont utiles.

Ainsi, dans la partie 2, nous décrivons des variantes pondérées des séries de Poincaré des sous-groupes discrets d'isométries de variétés riemanniennes de courbure négative (qui sont des séries de Dirichlet au sens ci-dessus).

Elles sont utiles pour divers problèmes de comptage, équidistribution et autres aspects de théorie ergodique en courbure négative.

Dans la partie 3, nous introduisons les séries d'Eisenstein de sous-groupes discrets d'isométries de variétés riemanniennes de courbure négative munis d'un sous-groupe parabolique (qui sont des séries de Dirichlet relatives au sens ci-dessus, proches des séries Theta), utiles pour des problèmes allant de calculs de volumes à la théorie analytique des nombres, la théorie spectrale et la théorie des représentations.

Dans la partie 4, nous présentons les séries de Poincaré de différentielles quadratiques holomorphes, utiles en théorie de Teichmüller des surfaces de Riemann, et leur utilisation par McMullen au théorème d'hyperbolisation de Thurston des variétés de dimension 3.

De nombreuses généralisations du cadre ci-dessus des séries de Poincaré-Dirichlet sont possibles :

- en passant à  $f : X \rightarrow E$  une section  $\Gamma_0$ -équivariante d'un fibré vectoriel topologique  $p : E \rightarrow X$  muni d'une action de  $\Gamma$  par automorphismes de fibrés vectoriels et en considérant la série (lorsqu'elle converge)

$$P(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} \gamma^* f(x),$$

où, de manière standard,  $\gamma^* f = \gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$  (la partie 4 s'inscrit dans le cadre de cette généralisation);

- en passant à  $\Gamma$  un groupe topologique localement compact, à  $\Gamma_0$  un sous-groupe fermé de  $\Gamma$  tel qu'il existe une mesure  $\mu$  sur  $\Gamma_0 \backslash \Gamma$  invariante par translations à droite par  $\Gamma$ , à  $X$  un espace topologique muni d'une action continue de  $\Gamma$  et d'une application  $f : X \rightarrow \mathbf{C}$  continue  $\Gamma_0$ -invariante, et en considérant (lorsqu'elle existe) l'intégrale

$$P(x) = \int_{\Gamma_0 \gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} f(\gamma x) d\mu(\Gamma_0 \gamma).$$

Par exemple, soit  $X$  un espace métrique propre (c'est-à-dire dont les boules fermées sont compactes). De manière standard, la distance de tout espace métrique sera notée  $d$ . Soient  $\Gamma$  un sous-groupe fermé du groupe des isométries de  $X$  (localement compact pour la topologie compacte-ouverte),  $\Gamma_0 = \{1\}$  et  $\mu_\Gamma$  une mesure de Haar sur  $\Gamma$  (la mesure de comptage lorsque  $\Gamma$  est discret, ce qui le seul cas considéré dans ce texte). Nous pouvons considérer (voir [BuM]) l'intégrale de Poincaré

$$P_\Gamma(x, y, s) = \int_{\gamma \in \Gamma} e^{-s d(\gamma y, x)} d\mu_\Gamma(\gamma),$$

et son abscisse de convergence (indépendante de  $x, y$  par l'inégalité triangulaire), que nous appellerons *exposant critique* de  $\Gamma$ ,

$$\delta(\Gamma) = \inf\{s > 0 : P_\Gamma(x, y, s) < +\infty\} \in [0, +\infty].$$

Une extension aux sous-groupes fermés non discrets des travaux de Quint [Qui1, Qui2] reste à faire.

Nous renvoyons à [BH] pour toute terminologie non expliquée de courbure négative, d'espaces  $\text{CAT}(-1)$  et de leurs isométries.

## 2. SÉRIES DE POINCARÉ ET MESURES DE GIBBS

Le but de cette partie est d'étendre les séries de Poincaré usuelles de groupes discrets d'isométries de variétés à courbure strictement négative en ajoutant des poids pour tenir compte d'un potentiel fixé. Cette généralisation a été initiée par Ledrappier [Led1], Babillot [Bab], Hamenstädt [Ham], Coudene [Cou], Mohsen [Moh], mais nous donnerons l'approche issue de [PPS].

Soit  $X$  une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative pincée  $-b^2 \leq K \leq -1$ , où  $b \geq 1$  est une constante. Notons  $\partial_\infty X$  son bord à l'infini,  $\pi : T^1 X \rightarrow X$  son fibré unitaire tangent et  $x_0 \in X$  un point base. Munissons  $T^1 X$  de la métrique riemannienne standard. Soit  $\Gamma$  un groupe discret non élémentaire d'isométries de  $X$ . Enfin, soit  $F : T^1 X \rightarrow \mathbf{R}$  une application höldérienne  $\Gamma$ -invariante, appelée un *potentiel*.

Notons  $(g_t : T^1 X \rightarrow T^1 X)_{t \in \mathbf{R}}$  le flot géodésique de  $X$ , et  $\iota : T^1 X \rightarrow T^1 X$  l'antipodie  $v \mapsto -v$ . Nous identifierons  $T^1 X$  avec son image dans  $\partial_\infty X \times \partial_\infty X \times \mathbf{R}$  par l'application (appelée *paramétrage de Hopf*) qui associe à un vecteur tangent unitaire  $v$  le triplet  $(v_-, v_+, t)$  des extrémités  $v_-$  et  $v_+$  de la géodésique  $\ell_v : \mathbf{R} \rightarrow X$  telle que  $\ell_v(0) = v$  et de la distance algébrique  $t$  le long de  $\ell_v(\mathbf{R})$  (orientée de  $v_-$  à  $v_+$ ) entre le point de  $\ell_v(\mathbf{R})$  le plus proche de  $x_0$  et  $\ell_v(0)$ . Pour  $x, y \in X$ , notons

$$\int_x^y F = \int_0^{d(x,y)} F(g_t v) dt,$$

où  $v \in T^1 X$  est tel que  $\pi(v) = x$  et  $\pi(g_{d(x,y)} v) = y$  (unique si  $y \neq x$ ).

Si  $C$  est une orbite périodique du flot géodésique quotient dans  $\Gamma \backslash T^1 X$ , la *longueur de  $C$*  est  $\text{Long}(C) = d(z, \gamma z)$  et sa *période* pour  $F$  est

$$\text{Per}_F(C) = \int_z^{\gamma z} F,$$

où  $z$  est n'importe quel point de  $X$  tel que le segment  $[z, \gamma z]$  pour un  $\gamma \in \Gamma$ , relevé dans  $T^1X$  par les vecteurs tangents, se projette dans  $\Gamma \backslash T^1X$  sur  $C$ . Nous noterons  $\mathcal{L}_C$ , et appellerons *mesure de Lebesgue* le long de  $C$ , la mesure sur  $\Gamma \backslash T^1X$  de support  $C$ , obtenue en poussant en avant la mesure de Lebesgue du segment  $[z, \gamma z]$  par l'application de ce segment sur  $C$  décrite ci-dessus.

Pour  $x, y \in X$ , la *série de Poincaré* de  $(\Gamma, F)$  est l'application  $P_{\Gamma, F, x, y} : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$P_{\Gamma, F, x, y}(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma y} (F-s)} .$$

L'*exposant critique* de  $(\Gamma, F)$  est l'élément  $\delta_{\Gamma, F}$  de  $] -\infty, +\infty]$  défini par

$$\delta_{\Gamma, F} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Ln} \sum_{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma y) \leq n} e^{\int_x^{\gamma y} F} ,$$

qui existe et est indépendant de  $x, y$ , voir [PPS, Chap. 3,5]. Lorsque  $F = 0$ , nous retrouvons la série de Poincaré et l'exposant critique usuels de  $\Gamma$  (voir [Pei] pour une introduction). Nous supposons dans la suite que  $\delta_{\Gamma, F} < +\infty$ , ce qui est par exemple vérifié si  $F$  est borné. Comme  $\delta_{\Gamma, F+\kappa} = \delta_{\Gamma, F} + \kappa$ , nous supposons que  $\delta_{\Gamma, F} > 0$ . Pour simplifier dans ces notes, nous supposons aussi que la série  $P_{\Gamma, F, x, y}(s)$  diverge en  $s = \delta_{\Gamma, F}$ .

Le *cocycle de Gibbs* (normalisé) pour le potentiel  $F$  est l'application  $C_F : \partial_\infty X \times X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  (bien) définie par

$$(\xi, x, y) \mapsto C_{F, \xi}(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_y^{\xi(t)} (F - \delta_{\Gamma, F}) - \int_x^{\xi(t)} (F - \delta_{\Gamma, F})$$

où  $t \mapsto \xi(t)$  est n'importe quel rayon géodésique de point à l'infini  $\xi$ . Lorsque  $F = 0$ , nous retrouvons le cocycle de Busemann multiplié par  $\delta_F$ .

Notons  $D_z$  la masse de Dirac en tout point  $z$  de  $X$ , et  $(\mu_{F, x})_{x \in X}$  la limite (qui existe et est indépendante de  $x_0$ , voir [PPS, Chap. 3,5]) quand  $s \rightarrow \delta_{\Gamma, F}^+$  de la famille de mesures finies

$$\frac{1}{P_{\Gamma, F, x_0, x_0}(s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_{x_0}^{\gamma x} (F-s)} D_{\gamma x} .$$

Avec le paramétrage de Hopf, définissons une mesure  $\tilde{m}_F$  sur  $T^1X$ , par

$$d\tilde{m}_F(v) = \frac{d\mu_{F \circ L, x}(v_-)}{e^{C_{F \circ L, v_-}(x, \pi(v))}} \frac{d\mu_{F, x}(v_+)}{e^{C_{F, v_+}(x, \pi(v))}} dt .$$

Elle est invariante par  $\Gamma$  et par le flot géodésique. Elle définit donc une mesure  $m_F$  sur le quotient  $\Gamma \backslash T^1X$  invariante par le flot géodésique quotient, appelée la *mesure de Gibbs* de potentiel  $F$ .

EXEMPLES. Supposons  $\Gamma$  sans torsion et  $M = \Gamma \backslash X$  compacte. Les mesures de Gibbs interpolent entre les deux mesures suivantes (voir [PPS, Chap. 3,7]).

- Si  $F = 0$ , alors  $m_F$  est la mesure d'entropie maximale (dite de Bowen-Margulis) sur  $T^1M$ .
- Si  $F = -\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Ln}(\text{Jac}(g_t|_{\mathcal{F}^{su}}))$  où  $\mathcal{F}^{su}$  est le feuilletage fortement instable du flot géodésique, alors  $m_F$  est la mesure de Liouville  $\mu_{\text{Liou}}$  sur  $T^1M$ , qui se désintègre par la projection canonique  $T^1M \rightarrow M$  sur la mesure riemannienne  $d\text{vol}_M$ , de mesures sur les fibres les mesures sphériques :

$$d\mu_{\text{Liou}}(v) = \int_{x \in M} d\text{vol}_{T_x^1M}(v) d\text{vol}_M(x).$$

Nous montrons dans [PPS] de très nombreux résultats: le fait (à la Roblin ou Dal'Bo-Peigné-Sambusetti) que la limite supérieure définissant l'abscisse de convergence de la série de Poincaré de  $(\Gamma, F)$  est une limite; un théorème à la Hopf-Tsuji-Sullivan-Roblin caractérisant la divergence/convergence de la série de Poincaré de  $(\Gamma, F)$  en son abscisse de convergence par des propriétés d'ergodicité/non ergodicité d'une mesure de Gibbs de  $(\Gamma, F)$  (unique dans le cas divergent) pour le flot géodésique quotient; un principe variationnel (voir [Led2] pour une introduction lorsque  $F = 0$ ); et divers résultats d'équidistribution et de comptage à la Bowen, Margulis, Roblin [Rob], dont nous ne citons qu'un exemple dans ces notes :

THÉORÈME 1 (Paulin-Pollicott-Shapira [PPS, Theo. 9.8]). *Supposons que  $m_F$  soit finie et que l'ensemble des distances de translations  $\inf_{x \in X} d(x, \gamma x)$  des éléments  $\gamma$  de  $\Gamma$  engendre un sous-groupe dense de  $\mathbf{R}$ . Alors, quand  $t \rightarrow +\infty$ , les mesures*

$$\delta_{\Gamma, F} e^{-\delta_{\Gamma, F} t} \sum_{\text{Long}(C) \leq t} e^{\text{Per}_F(C)} \mathcal{L}_C$$

*convergent pour la topologie faible-étoile vers  $\frac{m_F}{\|m_F\|}$ .  $\square$*

REMARQUE 2. Des versions relatives des séries de Poincaré de groupes discrets existent. Soient  $X$  un espace  $\text{CAT}(-1)$  propre,  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries de  $X$ ,  $C_0, C_1$  deux convexes fermés de  $X$ , de stabilisateurs  $\Gamma_0, \Gamma_1$  respectivement dans  $\Gamma$ , tels que  $\Gamma_0 \backslash \{\gamma \in \Gamma : C_0 \cap \gamma C_1 \neq \emptyset\} / \Gamma_1$  soit fini.

Par exemple, cette condition est vérifiée lorsque  $\Gamma$  est géométriquement fini (voir par exemple [Bow]) et  $C_0 = C_1$  est une horoboule suffisamment petite centrée en un point fixe parabolique de  $\Gamma$ , ainsi que lorsque  $C_0 = C_1$

est l'enveloppe convexe de l'ensemble limite d'un sous-groupe  $\Gamma_0$  convexe-cocompact *presque malnormal* (ceci signifie que pour tout  $\gamma \in \Gamma - \Gamma_0$ , le sous-groupe  $\gamma\Gamma_0\gamma^{-1} \cap \Gamma_0$  est fini).

Nous pouvons alors définir la *série de Poincaré* (relative) de  $(\Gamma, C_0, C_1)$

$$P(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_1} e^{-s d(\gamma C_1, C_0)},$$

où la somme porte sur un système de représentants des doubles classes, et ne dépend pas de son choix. Elle mesure la distribution des arcs géodésiques perpendiculaires communs à  $\Gamma_0 \backslash C_0$  et  $\Gamma_1 \backslash C_1$  dans  $\Gamma \backslash X$ .

Son abscisse de convergence  $\delta_{\Gamma, C_0, C_1}$  est le taux de croissance logarithmique quand  $n \rightarrow +\infty$  du nombre (avec multiplicités) d'arcs géodésiques perpendiculaires communs à  $\Gamma_0 \backslash C_0$  et  $\Gamma_1 \backslash C_1$  de longueur au plus  $n$  (voir par exemple [PP1, Théo. 1.1] pour un exemple de calcul). Elle est inférieure ou égale à l'exposant critique  $\delta(\Gamma)$  de  $\Gamma$ , et lui est égale si les exposants critiques  $\delta(\Gamma_0)$  de  $\Gamma_0$  et  $\delta(\Gamma_1)$  de  $\Gamma_1$  sont strictement inférieurs à  $\delta(\Gamma)$ . Les versions avec potentiel existent, en intégrant le potentiel le long de l'unique arc de géodésique perpendiculaire commun de  $C_0$  à  $\gamma C_1$  quand il existe (voir par exemple [PP3]).

### 3. SÉRIES D'EISENSTEIN, CALCULS DE VOLUMES HYPERBOLIQUES ET THÉORIE SPECTRALE

Soient  $X$  un espace  $\text{CAT}(-1)$  propre,  $\partial_\infty X$  son bord à l'infini,  $x_0 \in X$ ,  $(\xi, x, y) \mapsto B_\xi(x, y) = \lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z)$  sa fonction de Busemann de  $\partial_\infty X \times X \times X$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries de  $X$ ,  $L(\Gamma)$  son ensemble limite,  $\xi_\infty$  un point fixe parabolique de  $\Gamma$  dans  $\partial_\infty X$ , et  $\Gamma_\infty$  le stabilisateur de  $\xi_\infty$  dans  $\Gamma$ .

La *série d'Eisenstein* de  $\Gamma$  relative à la cuspide  $\xi_\infty$  est

$$E_{\xi_\infty}(x, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} e^{-s B_{\xi_\infty}(\gamma x, x_0)},$$

où la somme porte sur un système de représentants des classes à gauche de  $\Gamma_\infty$  dans  $\Gamma$  (et ne dépend pas de son choix). Elle entre bien dans le cadre des séries de Poincaré-Dirichlet (relatives).

La définition fait sens si  $X$  est  $\text{CAT}(0)$ , mais par exemple pour les espaces symétriques de type non compact  $G/K$ , il vaut mieux utiliser la décomposition

d'Iwasawa  $G = KAN$  et travailler avec des formes linéaires sur  $A$ , à la Quint [Qui1, Qui2, Qui3], voir aussi la remarque 4.

Un point fixe parabolique  $\xi_\infty$  de  $\Gamma$  est *borné* si le quotient  $\Gamma_\infty \backslash (L(\Gamma) - \{\xi_\infty\})$  est compact. Notons  $\delta(\Gamma)$  et  $\delta(\Gamma_\infty)$  les exposants critiques de  $\Gamma$  et de  $\Gamma_\infty$ . Nous renvoyons à [DOP] pour une étude de la condition  $\delta(\Gamma_\infty) < \delta(\Gamma)$ .

**PROPOSITION 3.** *Si  $\xi_\infty$  est un point fixe parabolique borné de  $\Gamma$ , alors l'abscisse de convergence de la série d'Eisenstein  $E_{\xi_\infty}$  est inférieure ou égale à  $\delta(\Gamma)$ , avec égalité si  $\delta(\Gamma_\infty) < \delta(\Gamma)$ .*

*Démonstration.* La convergence ou divergence de la série d'Eisenstein est indépendante de  $x$  et de  $x_0$ . Soit  $x \in X$  de stabilisateur trivial dans  $\Gamma$ . Puisqu'un point fixe parabolique n'est pas un point limite radial, et puisque  $\xi_\infty$  est borné, il existe une horoboule  $C_\infty$  centrée en  $\xi_\infty$  telle que  $\gamma x \notin C_\infty$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Si  $x_0 \in \partial C_\infty$ , alors  $B_{\xi_\infty}(\gamma x, x_0) = d(\gamma x, C_\infty)$ , et la série d'Eisenstein coïncide avec la série de Poincaré relative de  $(\Gamma, C_\infty, \{x\})$  définie dans la remarque 2. Le résultat découle alors de cette remarque.  $\square$

Par exemple, soit  $X = \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  le modèle du demi-espace supérieur de l'espace hyperbolique réel de dimension  $n$ , qui est l'ouvert  $\mathbf{R}^{n-1} \times ]0, +\infty[$ , dont les projections d'un élément général  $x = (z, r)$  dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  et  $]0, +\infty[$  seront notées  $z = z(x)$  et  $r = r(x)$  respectivement, muni de la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{ds_{\text{euc}}^2(z) + dr^2}{r^2}.$$

Si  $x_0 = (0, 1)$  et si  $\xi_\infty = \infty$ , alors  $E_\infty(x, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} r(\gamma x)^s$ , par un calcul immédiat de la fonction de Busemann. Nous retrouvons l'expression générale des séries d'Eisenstein (dites non holomorphes) en géométrie hyperbolique réelle (voir par exemple [Kub, Chap. 2] en dimension 2). L'étude primordiale est due à Maass et à Selberg [Sel2], avec généralisation aux groupes de Lie plus généraux par Langlands (voir par exemple [Lan1]).

Par la proposition précédente, nous retrouvons que lorsque  $\Gamma$  est de covolume fini, l'abscisse de convergence de cette série d'Eisenstein est égale à  $n - 1$ , et en particulier l'application  $s \mapsto E_\infty(x, s)$  est holomorphe sur  $\{s \in \mathbf{C} : \text{Re } s > n - 1\}$ . Si  $s > n - 1$ , alors l'application  $\tilde{\varphi} : x \mapsto E_\infty(x, s)$  vérifie la propriété d'invariance recherchée :

$$(1) \quad \tilde{\varphi}(\gamma x) = \tilde{\varphi}(x)$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . De plus, par sommation et petit calcul,

$$\Delta \tilde{\varphi} = s((n-1) - s)\tilde{\varphi},$$

où  $\Delta = -r^2(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}) + (n-2)r\frac{\partial}{\partial r}$  est l'opérateur laplacien de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ . Donc  $\tilde{\varphi}$  passe au quotient en  $\varphi : \Gamma \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , qui, si  $\Gamma$  est sans torsion, est un vecteur propre  $C^\infty$  du laplacien de la variété hyperbolique  $\Gamma \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , de valeur propre  $s((n-1) - s)$ . Mais même lorsque  $\Gamma$  est de covolume fini,  $\varphi$  n'est pas forcément dans  $L^2(\Gamma \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n)$ , donc n'est pas forcément un vecteur propre de l'opérateur non borné  $\Delta$  de l'espace de Hilbert  $L^2(\Gamma \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n)$ .

En particulier, soient  $n = 2$  et  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ . Notons  $U(\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbf{Z} \right\}$  le sous-groupe unipotent triangulaire supérieur de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ . Le groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  agit à droite sur  $\mathbf{Z}^2$  par  $(\gamma, v) \mapsto {}^t\gamma v$ ; l'orbite de  $(0, 1)$  est l'ensemble  $\mathcal{P}$  des couples de nombres premiers entre eux, et le stabilisateur de  $(0, 1)$  est  $U(\mathbf{Z})$ . Pour tout  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ , nous avons  $r(\gamma x) = \frac{r}{(cz+d)^2 + c^2r^2}$ . Donc pour tout  $x = (z, r) \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2$ ,

$$(2) \quad E_\infty(x, s) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in U(\mathbf{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} r(\gamma x)^s = \frac{1}{2} \sum_{(c, d) \in \mathcal{P}} \frac{r^s}{((cz+d)^2 + c^2r^2)^s}.$$

REMARQUE 4. Un cas particulier de séries de Poincaré est le suivant (appelées *séries Theta*), voir par exemple [Lan, p. 240]. Soient  $G$  un groupe de Lie réel connexe semi-simple de centre fini sans facteur compact (par exemple  $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$  pour  $n \geq 2$ ),  $G = KAN$  une décomposition d'Iwasawa de  $G$  (par exemple  $K = \mathrm{SO}(n)$ ,  $A$  le sous-groupe des matrices diagonales à coefficients positifs,  $N$  le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures si  $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ ) et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  tel que  $\Gamma \cap N$  soit un réseau de  $N$ . L'opérateur *Theta* est l'application  $\Theta$  partiellement définie de l'ensemble des applications  $f$  de  $N \backslash G$  (ou  $N \backslash G/K$ ) dans  $\mathbf{C}$  dans l'ensemble des applications de  $\Gamma \backslash G$  (ou  $\Gamma \backslash G/K$ ) dans  $\mathbf{C}$  définie par

$$\Theta f(x) = \sum_{\gamma \in (\Gamma \cap N) \backslash \Gamma} f(\gamma x).$$

Lorsque  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ ,  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  et  $f : N \backslash G/K = A \rightarrow \mathbf{C}$  est l'application  $a \mapsto e^{2s \operatorname{arccosh}(2 \operatorname{tr}(a))}$ , nous retrouvons (à constante multiplicative près) la série d'Eisenstein de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$  en la cuspe à l'infini.

### 3.1 CALCULS DE VOLUMES HYPERBOLIQUES

Le résultat suivant est immédiat, par intégration sur le domaine fondamental usuel ou par la formule de Gauss-Bonnet.



PROPOSITION 5. *Le volume hyperbolique de l'orbifold hyperbolique  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2$  est égal à*

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2) = \frac{\pi}{3}.$$

La méthode que nous allons exposer sur cet exemple, adaptée à un cadre arithmétique, est celle de Rankin-Selberg [Ran, Sel1] en dimension 2. Elle consiste à intégrer des séries d'Eisenstein sur des domaines fondamentaux (pas forcément explicites) et à appliquer une technique, maintenant connue sous le nom de “dépliage”, de permutation d’une intégrale sur un domaine fondamental et d’une somme sur des éléments du groupe pour se ramener à intégrer sur une réunion convenable de domaines fondamentaux. Elle a été généralisée par Langlands [Lan2] aux réseaux des points entiers de n’importe quel groupe algébrique connexe semi-simple déployé sur  $\mathbf{Q}$ . Voir aussi [Sar, p. 261-262] en dimension 3.

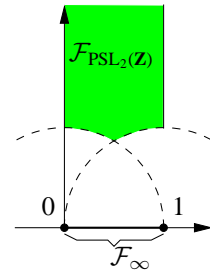
Il existe une formule générale donnant le covolume de groupes arithmétiques, due à G. Prasad [Pra, Theo. 3.7]. Mais dans certains cas concrets, il peut être plus rapide d'utiliser d'autres méthodes que de calculer les divers ingrédients (exigeant une connaissance intime de la classification des groupes algébriques semi-simples sur  $\mathbf{Q}$ ) qui interviennent dans la formule de Prasad.

*Démonstration.* Prenons  $n = 2$  et  $E_{\infty}(x, s)$  la série d'Eisenstein pour la cuspe à l'infini de  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ , avec  $s > n - 1$ . La méthode consiste à calculer de deux manières différentes le résidu en  $s = n - 1$  de

$$b(s) = \int_{\mathcal{F}_{\Gamma}} (E_{\infty}(x, s) - r^s) d \mathrm{vol}_{\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n}(x)$$

où  $\mathcal{F}_{\Gamma}$  est un domaine fondamental bien choisi de  $\Gamma$  (voir l'appendice A), d'une part en permutant l'intégrale et le résidu, d'autre part en “dépliant”, c'est-à-dire en permutant l'intégrale et la série définissant  $E_{\infty}(x, s)$ .

Fixons un domaine fondamental de Ford  $\mathcal{F}_{\Gamma}$  de  $\Gamma$  : si  $\mathcal{F}_{\infty}$  est un domaine fondamental compact de  $\Gamma_{\infty}$  agissant sur  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n - \{\infty\}$ , dont le bord est  $C^{\infty}$  par morceaux, il existe une application  $\sigma : \mathcal{F}_{\infty} \rightarrow ]0, +\infty[$  de classe  $C^{\infty}$  par morceaux, majorée et minorée par des constantes strictement positives (car  $\Gamma$  est de covolume fini, avec une seule orbite de points fixes paraboliques), telle que  $\mathcal{F}_{\Gamma} = \{(z, r) \in \mathcal{F}_{\infty} \times ]0, +\infty[ : r \geq \sigma(z)\}$ .



La propriété d'équivariance (1), qui dit en particulier que  $x = (z, r) \mapsto E_{\infty}(x, s) = E_{\infty}(z, r, s)$  est invariante par  $U(\mathbf{Z})$ , implique que si  $s > 1$ ,

l'application  $z \mapsto E_\infty(z, r, s)$  (de classe  $C^\infty$  et même analytique réelle) de  $\mathbf{R} = \partial_\infty \mathbf{H}_\mathbf{R}^2 - \{\infty\}$  dans  $\mathbf{R}$  est 1-périodique. Elle admet donc un développement en série de Fourier en la variable réelle  $z$ , de la forme

$$E_\infty(z, r, s) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(r, s) e^{2n\pi i z},$$

où  $c_n(r, s) = \int_0^1 E_\infty(z, r, s) e^{-2n\pi i z} dz$ . Par la formule (2), nous avons donc

$$c_n(r, s) = \int_0^1 \frac{1}{2} \sum_{(c, d) \in \mathcal{P}} \frac{r^s}{((cz + d)^2 + c^2 r^2)^s} e^{-2n\pi i z} dz.$$

En séparant  $c = 0$ , en regroupant  $c$  et  $-c$ , puis les  $d$  modulo  $c$ , et par changement de variable  $w = \frac{z+d}{r}$ , en notant  $\delta_{n,0} = 1$  si  $n = 0$  et  $\delta_{n,0} = 0$  sinon, le coefficient  $c_n(r, s)$  vaut

$$\begin{aligned} & r^s \int_0^1 e^{-2n\pi i z} dz + \sum_{(c, d) \in \mathcal{P}, c > 0, d \in [0, c-1]} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^s}{((cz + d)^2 + c^2 r^2)^s} e^{-2n\pi i z} dz \\ &= r^s \delta_{n,0} + r^{1-s} \left( \sum_{c > 0} \frac{1}{c^{2s}} \sum_{d \in [0, c-1], (c, d) \in \mathcal{P}} e^{-\frac{2\pi i n d}{c}} \right) \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(1 + w^2)^s} e^{-2n\pi i r w} dw. \end{aligned}$$

En particulier,  $c_0(r, s) = r^s + \phi_0(s) r^{1-s}$  où

$$\phi_0(s) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{(1 + w^2)^s} \right) \left( \sum_{c=1}^{\infty} \frac{\varphi(c)}{c^{2s}} \right),$$

où  $\varphi$  est la fonction d'Euler, voir l'appendice B. De plus, on peut vérifier que  $s \mapsto E_\infty(z, r, s) - c_0(r, s)$  est holomorphe sur un voisinage compact de  $s = 1$ , et intégrable, uniformément en  $s$  dans ce compact, en  $(z, r) \in K \times [r_0, \infty[$  où  $K$  est un compact de  $\partial_\infty \mathbf{H}_\mathbf{R}^n - \{\infty\}$  et  $r_0 > 0$ , car  $\int_{r_0}^{\infty} \frac{r^{1-s} dr}{r^2} = \frac{1}{s r_0^s}$  est uniformément borné sur un tel voisinage compact.

Notons que  $\phi_0$  est holomorphe sur  $\{s \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$ , admet une extension méromorphe sur  $\{s \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$  ayant un pôle simple en  $s = 1$  de résidu (voir l'appendice B)

$$\operatorname{Res}_{s=1} \phi_0(s) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{1 + w^2} \right) \left( \operatorname{Res}_{s=1} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{\varphi(c)}{c^{2s}} \right) = \frac{3}{\pi}.$$

Donc  $\operatorname{Res}_{s=1} E_\infty(z, r, s) = \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) c_0(r, s) = \frac{3}{\pi}$ .

ÉTAPE 1 (SÉRIE DE FOURIER). Nous avons (nous pouvons bien permuter la limite et l'intégrale par les propriétés ci-dessus du développement en série de Fourier de la série d'Eisenstein)

$$\operatorname{Res}_{s=1} b(s) = \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \operatorname{Res}_{s=1} (E_\infty(z, r, s) - r^s) d \operatorname{vol}_{\mathbf{H}_\mathbf{R}^2}(x) = \operatorname{Vol}(\Gamma \backslash \mathbf{H}_\mathbf{R}^2) \frac{3}{\pi}.$$

ÉTAPE 2 (DÉPLIAGE). En permutant l'intégrale et la série à termes positifs par le théorème de Fubini, la finitude de  $b(s)$  découlant des propriétés du développement en série de Fourier de la série d'Eisenstein, en utilisant l'invariance de la mesure riemannienne par les isométries,  $b(s)$  vaut

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} r(\gamma x)^s \right) - r^s d \operatorname{vol}_{\mathbf{H}_\mathbf{R}^2}(x) &= \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash (\Gamma - \Gamma_\infty)} r(\gamma x)^s d \operatorname{vol}_{\mathbf{H}_\mathbf{R}^2}(x) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash (\Gamma - \Gamma_\infty)} \int_{\mathcal{F}_\Gamma} r(\gamma x)^s d \operatorname{vol}_{\mathbf{H}_\mathbf{R}^2}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash (\Gamma - \Gamma_\infty)} \int_{\gamma \mathcal{F}_\Gamma} r(x)^s d \operatorname{vol}_{\mathbf{H}_\mathbf{R}^2}(x). \end{aligned}$$

Les  $\gamma \mathcal{F}_\Gamma$  pour  $\gamma \in \Gamma$  sont de frontière négligeable, d'intérieurs deux à deux disjoints, et de réunion  $\mathbf{H}_\mathbf{R}^2$ . Notons

$$\mathcal{F}_\Gamma^* = \{(z, r) \in \mathcal{F}_\infty \times [0, +\infty[ : r < \sigma(z)\},$$

où  $\sigma : \mathcal{F}_\infty \rightarrow [0, +\infty[$  a été défini au moment du choix du domaine fondamental de  $\Gamma$ . Donc, en rappelant que  $d \operatorname{vol}_{\mathbf{H}_\mathbf{R}^n}(x) = d \operatorname{vol}_{\mathbf{R}^{n-1}}(z) \frac{dr}{r^n}$ ,

$$\begin{aligned} b(s) &= \int_{\Gamma_\infty \backslash (\mathbf{H}_\mathbf{R}^2 - \Gamma_\infty \mathcal{F}_\Gamma)} r(x)^s d \operatorname{vol}_{\Gamma_\infty \backslash \mathbf{H}_\mathbf{R}^2}(x) = \int_{\mathcal{F}_\Gamma^*} r(x)^s d \operatorname{vol}_{\mathbf{H}_\mathbf{R}^2}(x) \\ &= \int_{z \in \mathcal{F}_\infty} \int_0^{\sigma(z)} r^s \frac{dr}{r^2} d \operatorname{vol}_\mathbf{R}(z) = \int_{z \in \mathcal{F}_\infty} \frac{\sigma(z)^{s-1}}{s-1} d \operatorname{vol}_\mathbf{R}(z). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{F}_\infty$  est compact, et puisque  $\sigma : \mathcal{F}_\infty \rightarrow \mathbf{R}$  est majoré et minoré par des constantes strictement positives, nous avons donc

$$\operatorname{Res}_{s=1} b(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \int_{z \in \mathcal{F}_\infty} \sigma(z)^{s-1} d \operatorname{vol}_\mathbf{R}(z) = \operatorname{Vol}(\mathcal{F}_\infty) = 1.$$

La proposition 5 découle des étapes 1 et 2.  $\square$

Cette méthode a permis à Sarnak [Sar] de redémontrer la formule essentiellement due à Humbert du covolume des groupes de Bianchi (voir par exemple les parties 8.8 et 9.6 de [EGM]). Soit  $K$  un corps de nombres quadratique imaginaire (par exemple  $K = \mathbf{Q}(i)$ ),  $\mathfrak{O}_K$  l'anneau des entiers de

$K$  (l'anneau des entiers de Gauss  $\mathbf{Z}[i]$  dans cet exemple),  $\omega_K$  le nombre d'éléments inversibles de  $\mathfrak{D}_K$  ( $\omega_K = 4$  dans cet exemple),  $D_K$  le discriminant de  $K$  ( $D_K = -4$  dans cet exemple) et  $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$  la fonction zeta de Dedekind, où la somme porte sur tous les idéaux non nuls  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{D}_K$  de norme  $N(\mathfrak{a}) = \text{Card}(\mathfrak{D}_K/\mathfrak{a})$ . Soit  $\mathcal{P}_K = \{(c, d) \in \mathfrak{D}_K \times \mathfrak{D}_K : c\mathfrak{D}_K + d\mathfrak{D}_K = \mathfrak{D}_K\}$  l'ensemble des couples d'entiers de  $K$  premiers entre eux. La série d'Eisenstein du groupe de Bianchi  $\text{PSL}_2(\mathfrak{D}_K)$  relative à la cuspide  $\infty$  est, pour tout  $x = (z, r) \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ ,

$$E_{\infty}(x, s) = \frac{1}{\omega_K} \sum_{(c, d) \in \mathcal{P}_K} \frac{r^s}{(|cz + d|^2 + |c|^2 r^2)^s}.$$

THÉORÈME 6 (Humbert). *Avec ces notations,*

$$\text{Vol}(\text{PSL}_2(\mathfrak{D}_K) \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3) = \frac{1}{4\pi^2} |D_K|^{3/2} \zeta_K(2). \quad \square$$

De manière semblable, nous pouvons calculer le covolume de sous-groupes arithmétiques construits par des quaternions dans l'espace hyperbolique réel de dimension 5. Notons que si  $\mathbf{H}$  est l'algèbre des quaternions de Hamilton réels (d'élément neutre 1, de base vectorielle réelle  $1, i, j, k$  où  $i^2 = j^2 = -1$  et  $ij = -ji = k$ ), alors la composante neutre du groupe des isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^5$  est isomorphe à  $\text{PSL}_2(\mathbf{H}) = \text{SL}_2(\mathbf{H})/\{\pm id\}$ , où  $\text{SL}_2(\mathbf{H})$  est le groupe des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  à coefficients dans  $\mathbf{H}$  dont le déterminant de Dieudonné, qui est la racine carrée de  $N(ad) + N(bc) - \text{tr}(a\bar{c}d\bar{b})$ , est égal à 1, où, si  $h = x + yi + zj + wk \in \mathbf{H}$ , alors  $\bar{h} = x - yi - zj - wk$ ,  $\text{tr}(h) = h + \bar{h}$  et  $N(h) = h\bar{h}$ .

THÉORÈME 7 (Emery [PP2, App.], Parkkonen-Paulin [PP2]). *Soit  $A$  une algèbre de quaternions définie sur  $\mathbf{Q}$  (par exemple  $A = \mathbf{H}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}i + \mathbf{Q}j + \mathbf{Q}k$  dans  $\mathbf{H}$ ), de discriminant réduit  $D(A)$  (par exemple  $D(A) = 2$  si  $A = \mathbf{H}_{\mathbf{Q}}$ ), et soit  $\mathfrak{D}$  un ordre maximal dans  $A$  (par exemple l'ordre de Hurwitz  $\mathfrak{D} = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}i + \mathbf{Z}j + \mathbf{Z}\frac{1+i+j+k}{2}$  si  $A = \mathbf{H}_{\mathbf{Q}}$ ). Alors le volume hyperbolique de  $\text{PSL}_2(\mathfrak{D}) \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^5$  est égal à*

$$\text{Vol}(\text{PSL}_2(\mathfrak{D}) \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^5) = \frac{\zeta(3)}{11520} \prod_{p \text{ premier}, p|D(A)} (p^3 - 1)(p - 1). \quad \square$$

La démonstration d'Emery utilise quand à elle la formule de G. Prasad du covolume de groupes arithmétiques [Pra, Theo. 3.7].

## 3.2 THÉORIE SPECTRALE DU LAPLACIEN

Soit  $M$  une variété riemannienne complète de volume fini. Le laplacien (riemannien)  $\Delta$  de  $M$  est défini sur les applications lisses  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  par

$$\Delta f = -\operatorname{tr} \nabla^2 f,$$

où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita de  $M$ ,  $\nabla_{X,Y}^2 f = \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f = X(Yf) - (\nabla_X Y)f = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle$  est le hessien de  $f$ , et la trace est calculée dans une base orthonormée. Le laplacien de  $M$  est un opérateur non borné auto-adjoint positif de l'espace de Hilbert  $\mathbf{L}^2(M)$  (voir l'appendice C). Si  $M$  est compacte, le spectre du laplacien est réduit à son spectre ponctuel (voir par exemple [BGM, §2.G]): il existe une suite de valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $\Delta$ , strictement croissante et convergeant vers  $+\infty$ , telle que  $\lambda_0 = 0$  (de multiplicité 1 si  $M$  est connexe) et  $\mathbf{L}^2(M)$  soit la somme hilbertienne des sous-espaces propres  $\operatorname{Ker}(\Delta - \lambda_i \operatorname{id})$  (chaque tel sous-espace étant par ailleurs de dimension finie et composé d'applications lisses). Dans le cas contraire, le spectre continu peut être non vide.

Les séries d'Eisenstein fournissent une description du spectre continu de l'opérateur laplacien sur les variétés hyperboliques géométriquement finies (voir par exemple [Ven, §3], même si les techniques de Lax-Philipp et d'autres comme [GM, §8] évitent maintenant l'étude directe de ces séries). Considérons de nouveau  $E_\infty(x, s)$  la série d'Eisenstein pour la cuspide à l'infini de  $\Gamma = \operatorname{PSL}_2(\mathbf{Z})$ , définie pour  $s > 1$ . Le résultat suivant découle des techniques de décomposition en série de Fourier ci-dessus (voir par exemple [Kub, §IV]).

**THÉORÈME 8.** *L'application  $s \mapsto E_\infty(x, s)$  admet une extension méromorphe sur  $\mathbf{C}$ , dont les pôles sont simples et réels.  $\square$*

Sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{K} = \mathbf{L}^2(]0, +\infty[, \frac{dt}{2\pi})$ , considérons l'opérateur non borné  $M_{\frac{1}{4}+t^2}$ , auto-adjoint, positif, de multiplication par  $\frac{1}{4} + t^2$  :

$$M_{\frac{1}{4}+t^2} f(t) = \left( \frac{1}{4} + t^2 \right) f(t).$$

Notons  $\mathcal{F}_\Gamma$  le domaine fondamental usuel de  $\Gamma$ ,  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert  $\mathbf{L}^2(\Gamma \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2)$ ,  $\mathcal{H}_C$  l'orthogonal (invariant par  $\Delta$ ) dans  $\mathcal{H}$  de la somme hilbertienne  $\mathcal{H}_P$  des sous-espaces propres de  $\Delta$ ,  $\mathcal{B}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}_C$  des applications bornées et, pour tout  $f \in \mathcal{B}$ ,

$$E(f)(t) = \int_{\mathcal{F}_\Gamma} E_\infty(x, \frac{1}{2} + it) f(x) d \operatorname{vol}_{\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2}(x).$$

Le résultat suivant de décomposition spectrale explicite décrit le spectre continu du laplacien sur  $\Gamma \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2$  (voir par exemple [Lan, p. 346]).

**THÉORÈME 9.** *L'application  $E$  s'étend en une conjugaison unitaire entre  $\Delta_{|\mathcal{H}_C}$  et  $M_{\frac{1}{4}+t^2}$ , c'est-à-dire en un isomorphisme  $E$  d'espaces de Hilbert de  $\mathcal{H}_C$  dans  $\mathcal{K}$  tel que les opérateurs non bornés  $E \circ \Delta_{|\mathcal{H}_C}$  et  $M_{\frac{1}{4}+t^2} \circ E$  coïncident.  $\square$*

Il n'est pas difficile de montrer que le spectre continu de  $M_{\frac{1}{4}+t^2}$  est  $[\frac{1}{4}, +\infty[$ . Puisque deux opérateurs non bornés unitairement conjugués ont même spectre continu, le spectre continu de  $\Delta_{|\mathcal{H}_C}$  est  $[\frac{1}{4}, +\infty[$ . Donc le spectre continu de  $\Delta$  est l'intervalle  $[\frac{1}{4}, +\infty[$  privé (avec les définitions de l'appendice C) des éventuelles valeurs propres de  $\Delta$  qu'il contient.

Par un tel lien entre décomposition spectrale du laplacien et développement en série de Fourier de séries de Poincaré (relatives) comme dans la partie 3.1, Selberg [Sel3] a montré la minoration  $\lambda_1 \geq 3/16$  de la première valeur propre non nulle du laplacien pour tout sous-groupe de congruence de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  (voir aussi [Kat], [GLPS] dans  $\mathrm{SO}(n, 1)$ , [Fri] pour  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ ).

#### 4. SÉRIES DE POINCARÉ ET THÉORÈME D'HYPERBOLISATION

Notons  $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ . Soit  $X$  une surface de Riemann.

Une *différentielle quadratique holomorphe*  $\phi$  sur  $X$  est (voir par exemple [Gar] pour tout complément) la donnée, pour toute carte  $(U, z)$  de  $X$ , d'une application holomorphe  $\phi_{U, z} : U \rightarrow \mathbf{C}$ , telle que pour toute carte locale  $(V, w)$  de  $X$ , en tout point de  $U \cap V$ , nous ayons  $\phi_{V, w} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \phi_{U, z}$ , où  $\frac{dw}{dz} = (w \circ z^{-1})' \circ z$ . Si  $f : Y \rightarrow X$  est une application holomorphe, alors il existe une unique différentielle quadratique holomorphe  $f^* \phi$  sur  $Y$  telle que si  $(U, z)$  est une carte de  $Y$  et  $(V, w)$  une carte de  $X$  telles que  $f(U) \subset V$ , alors  $(f^* \phi)_{U, z} = \phi_{V, w} \circ f'(f')^2$ .

Si  $\pi : \mathbf{D} \rightarrow X$  est un revêtement universel de surfaces de Riemann, de groupe de revêtement  $\Gamma$ , les différentielles quadratiques holomorphes sur  $X$  s'identifient aux applications holomorphes  $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  telles que  $\gamma^* \phi = \phi$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , où  $\gamma^* \phi = \phi \circ \gamma'(\gamma')^2$ .

Si  $\phi$  est une différentielle quadratique holomorphe sur  $X$ , alors il existe une unique mesure  $|\phi|$  sur  $X$  de densité  $|\phi_{U, z}|$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $|dz|^2$  dans toute carte  $(U, z)$ . Nous noterons

$$\|\phi\|_1 = \int_X |\phi|,$$

et  $\mathcal{Q}(X)$  l'espace de Banach des différentielles quadratiques  $\phi$  holomorphes de norme  $\|\phi\|_1$  finie.

Notons que  $\mathcal{Q}(\mathbf{D})$  est de dimension infinie: les restrictions à  $\mathbf{D}$  des applications polynomiales complexes y sont denses. Si  $X$  est compacte, alors  $\mathcal{Q}(X)$  est de dimension finie: si  $\phi \in \mathcal{Q}(X)$  n'est pas identiquement nulle, l'application linéaire qui à  $\psi \in \mathcal{Q}(X)$  associe la partie négative du développement de Laurent de l'application méromorphe  $\frac{\psi}{\phi}$  en chaque zéro de  $\phi$  est une injection (par le théorème de Liouville), à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, car  $\phi$  n'a qu'un nombre fini de zéros, chacun d'ordre fini.

Soient  $X = \Gamma \backslash \mathbf{D}$  et  $Y = \Gamma_0 \backslash \mathbf{D}$  des surfaces de Riemann uniformisées par  $\mathbf{D}$ , avec  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  des sous-groupes discrets de  $\text{Aut}(\mathbf{D})$ . Pour tout élément  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  de  $\mathcal{Q}(Y)$ , et pour tout  $z \in \mathbf{D}$ , notons

$$\Theta f(z) = \Theta_{Y/X} f(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} \gamma^* f(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} f(\gamma z) (\gamma'(z))^2,$$

où la somme porte sur un système de représentants des classes à droite de  $\Gamma_0$  dans  $\Gamma$  (et ne dépend pas de son choix). On peut définir l'opérateur  $\Theta = \Theta_{Y/X}$  de manière intrinsèque (sans uniformiser les surfaces), mais cette forme l'exprime comme une série de Poincaré (relative) au sens du préambule.

Notons  $p : Y \rightarrow X$  le revêtement de surfaces de Riemann défini par l'inclusion  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ . Alors que  $p^*$  transforme différentielle quadratique holomorphe sur  $X$  en différentielle quadratique holomorphe sur  $Y$ , l'opérateur  $\Theta$  s'essaie à la transformation inverse.

**PROPOSITION 10.** *L'application  $\Theta = \Theta_{Y/X} : \mathcal{Q}(Y) \rightarrow \mathcal{Q}(X)$  est une application linéaire continue de norme au plus 1. De plus, nous avons  $\Theta_{\mathbf{D}/X} = \Theta_{Y/X} \circ \Theta_{\mathbf{D}/Y}$ .*

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{Q}(Y)$ . Montrons que la série définissant  $\Theta f(z)$  converge uniformément sur les compacts de  $\mathbf{D}$ . Ceci montrera que l'application  $z \mapsto \Theta f(z)$  de  $\mathbf{D}$  dans  $\mathbf{C}$  est bien définie, holomorphe, et vérifie  $\Theta f(\gamma z) = \Theta f(z) (\gamma'(z))^{-2}$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , donc fournit une différentielle quadratique holomorphe sur  $X$ .

Soit  $(g_i)_{i \in I}$  un système de représentants à droite de  $\Gamma$  modulo  $\Gamma_0$ :  $\Gamma = \sqcup_{i \in I} \Gamma_0 g_i$ . Notons  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbf{D}$ , de sorte que  $\mathcal{D}_0 = \bigcup_{i \in I} g_i \mathcal{D}$  est un domaine fondamental de  $\Gamma_0$  sur  $\mathbf{D}$ . Alors, par le théorème de Fubini (et la méthode de "dépliage")

$$(3) \quad \int_{\mathcal{D}} |\Theta f(z)| |dz|^2 \leq \sum_{i \in I} \int_{\mathcal{D}} |f(g_i z)| |g'_i(z)|^2 |dz|^2 = \int_{\mathcal{D}_0} |f(w)| |dw|^2$$

est fini. Nous pouvons supposer  $I = \mathbf{N}$ . Notons  $S_n(z)$  la somme des  $n$  premiers termes de la série  $\Theta f(z)$ . Alors  $S_n$  converge dans  $\mathbf{L}^1(A)$  vers  $\Theta f$  pour tout ouvert relativement compact  $A$  de  $\mathbf{D}$ , par la formule (3). Pour tout  $\epsilon \in ]0, \frac{1}{3}[$ , notons  $A = \mathcal{B}(0, 1 - \epsilon) - \mathcal{B}(0, 1 - 2\epsilon)$ . La formule intégrale de Cauchy montre qu'il existe une constante  $c = c_\epsilon$  telle que, pour tout  $z \in \mathcal{B}(0, 1 - 3\epsilon)$ ,

$$|S_n(z) - S_m(z)| \leq c \int_A |S_n(z) - S_m(z)| |dz|^2.$$

Ceci montre la convergence uniforme sur les compacts de la série  $\Theta f(z)$ .

L'affirmation que la norme de l'opérateur  $\Theta$  est inférieure ou égale à 1 découle de la formule (3).

La dernière affirmation découle du fait que pour moyenner sur  $\Gamma$ , il suffit de moyenner d'abord sur  $\Gamma_0$ , puis sur  $\Gamma_0 \setminus \Gamma$ .  $\square$

REMARQUE. L'opérateur  $\Theta_{Y/X}$  est surjectif.

*Démonstration.* Par la dernière affirmation de la proposition précédente, il suffit en effet de montrer le résultat pour  $\Theta = \Theta_{\mathbf{D}/X}$ . Montrons ceci lorsque  $X$  est compacte. Fixons encore  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbf{D}$ . Pour  $\phi, \psi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  dans  $\mathcal{Q}(X)$ , posons

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathcal{D}} \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \phi(z) \overline{\psi(z)} |dz|^2.$$

Puisque  $\mu = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}$  est la mesure riemannienne de la métrique de Poincaré du disque  $\mathbf{D}$ , qui est invariante par  $\Gamma$ , et puisque le tenseur  $\frac{\phi \overline{\psi}}{\mu}$  est du type mesure, ceci est bien défini. Par le théorème de Cauchy-Schwarz, cette formule définit un produit scalaire sur  $\mathcal{Q}(X)$ , appelé le *produit scalaire de Weil-Petersson*.

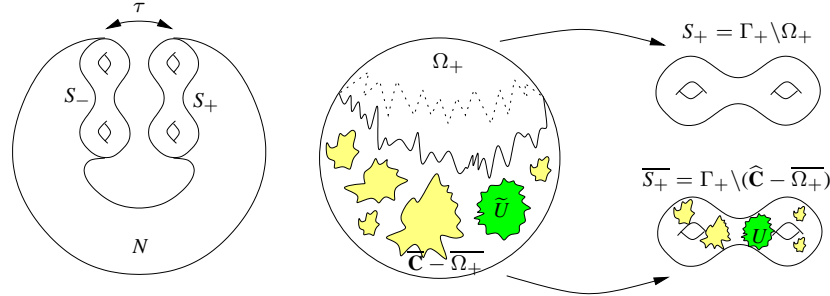
Puisque les polynômes sont denses dans  $\mathcal{Q}(\mathbf{D})$ , il suffit de montrer que le seul élément  $\phi$  de  $\mathcal{Q}(X)$  orthogonal aux images par  $\Theta$  des monômes  $z^n$  est l'élément nul. Si  $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est le développement en série de  $\phi$  dans  $\mathbf{D}$ , alors (encore une fois par la technique du "dépliage")



$$\begin{aligned}
 \langle \phi, \Theta(z^n) \rangle &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathcal{D}} \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \phi(z) \overline{\gamma(z)}^n \overline{\gamma'(z)}^2 |dz|^2 \\
 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathcal{D}} \frac{(1 - |\gamma(z)|^2)^2}{4 |\gamma'(z)|^2} \phi(\gamma(z)) (\gamma'(z))^2 \overline{\gamma(z)}^n \overline{\gamma'(z)}^2 |dz|^2 \\
 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma \mathcal{D}} \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \phi(z) \bar{z}^n |dz|^2 \\
 &= \int_{\mathcal{D}} \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \bar{z}^n |dz|^2 = c' a_n,
 \end{aligned}$$

où  $c'$  est une constante strictement positive. Le résultat en découle.  $\square$

Évoquons brièvement l'une des utilisations principales de ces séries Theta, la démonstration par McMullen [McM1, MCM2] du théorème d'hyperbolisation de Thurston. Nous renvoyons par exemple à [MT] pour les prérequis.



Soient  $N$  une variété de dimension 3, compacte, connexe, orientable, à bord  $\partial N = S_- \sqcup S_+$  réunion disjointe de deux surfaces connexes  $S_-, S_+$  de genre au moins 2, et  $\tau : S_- \rightarrow S_+$  un homéomorphisme renversant l'orientation. Supposons que  $N$  soit acylindrique (il n'existe pas de courbe fermée simple non homotope à zéro dans  $S_-$  qui soit homotope dans  $N$  à une courbe fermée simple dans  $S_+$ ), à bord incompressible (les groupes fondamentaux de  $S_-, S_+$  s'injectent dans celui de  $N$ ), et que son intérieur admette une métrique hyperbolique complète convexe-cocompacte:  $\text{int}(N) = \Gamma \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret sans torsion convexe-cocompact d'isométries préservant l'orientation de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ . Le but est de montrer que le recollement  $N/\tau$  de  $N$  le long de son bord par  $\tau$  admet une métrique hyperbolique.

Notons  $\Omega(\Gamma)$  le domaine de discontinuité de  $\Gamma$  (le complémentaire de son ensemble limite) dans la sphère de Riemann  $\widehat{\mathcal{C}}$  bord à l'infini de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ . Alors  $\partial N$  est la surface de Riemann  $\Gamma \backslash \Omega(\Gamma)$  dans la variété kleinéenne

$N = \Gamma \backslash (\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 \cup \Omega(\Gamma))$ . Choisissons une composante connexe  $\Omega_{\pm}$  du domaine de discontinuité  $\Omega(\Gamma)$  de  $\Gamma$  revêtant  $S_{\pm}$ , de stabilisateur  $\Gamma_{\pm}$ . Puisque le bord de  $N$  est incompressible, chaque composante connexe de  $\Omega(\Gamma)$  est simplement connexe. Puisque l'ensemble limite de  $\Gamma$  a au moins trois points, les  $\Omega_{\pm}$  sont conformément isomorphes au disque, et les revêtements  $\Omega_{\pm} \rightarrow S_{\pm}$  sont des revêtements universels de surface de Riemann. Si  $\tilde{U}$  est une composante connexe de  $\Omega(\Gamma)$  différente de  $\Omega_{\pm}$  qui revêt  $S_{\epsilon(U)}$  où  $\epsilon(U) \in \{-, +\}$ , alors son image  $U$  dans  $\overline{S_{\pm}} = \Gamma_{\pm} \backslash (\widehat{\mathbf{C}} - \Omega_{\pm})$  est appelée une *tâche de léopard*. Nous notons  $\Theta_U : \mathcal{Q}(U) \rightarrow \mathcal{Q}(S_{\epsilon(U)})$  l'application  $\Theta$  du revêtement  $U \rightarrow S_{\epsilon(U)}$  induit par le revêtement  $\tilde{U} \rightarrow S_{\epsilon(U)}$ .

Si  $\Gamma'$  est un groupe discret sans torsion d'automorphismes d'un ouvert simplement connexe  $\Omega'$  de la sphère de Riemann, notons  $\mathcal{QC}(\Gamma')$  l'ensemble de ses déformations quasi-conformes, c'est-à-dire l'ensemble des homéomorphismes quasi-conformes (voir [Gar, Chap. 1] pour une définition)  $f : \Omega' \rightarrow \Omega'$  tels que  $\rho(\gamma) = f\gamma f^{-1} \in \text{Aut}(\Omega')$  pour tout  $\gamma \in \Gamma'$  (et donc  $\rho = \rho_f$  est une représentation fidèle et discrète de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}(\Omega')$ ), modulo la relation d'équivalence  $f \sim f'$  s'il existe  $g \in \text{Aut}(\Omega')$  tel que  $\rho_f = g\rho_{f'}g^{-1}$ , et  $f'$  soit isotope à  $gf$  parmi les applications quasi-conformes conjuguant  $\Gamma$  et  $\rho_{f'}(\Gamma)$ .

L'espace de Teichmüller de la surface de Riemann  $\partial N = (\Gamma_- \backslash \Omega_-) \sqcup (\Gamma_+ \backslash \Omega_+)$  est alors par définition  $\mathcal{T}(\partial N) = \mathcal{QC}(\Gamma_-) \times \mathcal{QC}(\Gamma_+)$ . Si  $\overline{\partial N}$  est la surface de Riemann  $\partial N$  munie de l'orientation opposée, l'application de recollement  $\tau$  induit une application  $\tau^* : \mathcal{T}(\overline{\partial N}) \rightarrow \mathcal{T}(\partial N)$ .

Le théorème d'Ahlfors-Bers (voir par exemple [Kra]) dit que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{QC}(\Gamma) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{T}(\partial N) \\ [f] & \mapsto & [g_{\pm} \circ f|_{\Omega_{\pm}}] \end{array}$$

où  $g_{\pm} : f(\Omega_{\pm}) \rightarrow \Omega_{\pm}$  est n'importe quelle représentation conforme, est une bijection.

L'application d'épluchage  $\sigma : \mathcal{T}(\partial N) \rightarrow \mathcal{T}(\overline{\partial N})$  est la composition de

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}(\partial N) & \xrightarrow{\partial^{-1}} & \mathcal{QC}(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{T}(\overline{\partial N}) \\ s & \mapsto & [f] = \partial^{-1}(s) & \mapsto & [\overline{g}_{\pm} \circ f|_{\widehat{\mathbf{C}} - \overline{\Omega_{\pm}}}] \end{array}$$

où  $\overline{g}_{\pm} : f(\widehat{\mathbf{C}} - \overline{\Omega_{\pm}}) \rightarrow \widehat{\mathbf{C}} - \overline{\Omega_{\pm}}$  est n'importe quelle représentation conforme.

La démonstration que la variété recollée  $N/\tau$  admet une métrique hyperbolique comporte deux étapes. La première, relativement facile, est que si  $\tau^* \circ \sigma : \mathcal{T}(\partial N) \rightarrow \mathcal{T}(\partial N)$  admet un point fixe, alors  $N/\tau$  admet une métrique hyperbolique. La seconde, qui représente un tour de force, que ce soit par

la méthode originelle de Thurston (voir par exemple [Kap]) ou celle de McMullen [Mc2], est de montrer que l'application  $\tau^* \circ \sigma$  admet un point fixe. Celui-ci est obtenu par une méthode de contraction, dont l'élément clef est le théorème suivant.

**THÉORÈME 11.** [McMullen [Mc1]] *Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement galoisien de surfaces de Riemann connexes, où  $X$  est compacte de genre au moins 2. Alors  $\|\Theta_{Y/X}\| \leq 1$  avec égalité si et seulement si le groupe de revêtement est moyennable.*  $\square$

Notons une analogie remarquable, soulignée par F. Dal'Bo et liée aux propriétés des séries de Poincaré comme les démonstrations le montrent, entre cet énoncé et l'existence d'un trou spectral  $\delta(\Gamma_0) < \delta(\Gamma)$  si  $\Gamma_0$  est un sous-groupe distingué de  $\Gamma$  tel que  $\Gamma/\Gamma_0$  est non moyennable (voir [RoT] pour une exposition).

En renvoyant à [Gar, MT] pour les bases et à [McM2] pour une démonstration complète, expliquons brièvement comment le théorème 11 est lié à l'existence d'un point fixe de  $\tau^* \circ \sigma$ . L'espace cotangent à l'espace de Teichmüller de  $\partial N$  est le fibré vectoriel sur  $\mathcal{T}(\partial N)$  (trivialisable) dont la fibre au-dessus du point base  $([id], [id])$  est l'espace des différentielles quadratiques holomorphes  $\mathcal{Q}(\partial N) = \mathcal{Q}(S_-) \times \mathcal{Q}(S_+)$  sur la surface de Riemann  $\partial N = \Gamma \backslash \Omega(\Gamma)$ . La remarque clef est que l'application cotangente en ce point base de l'application d'épluchage est l'application de  $\mathcal{Q}(\overline{\partial N})$  dans  $\mathcal{Q}(\partial N)$  qui à  $(\phi_\epsilon)_{\epsilon \in \{-, +\}}$  associe

$$\left( \sum_{\substack{U \text{ tâche de} \\ \text{léopard sur } \overline{S_-} \\ \epsilon(U) = \epsilon}} \Theta_U(\phi_{-|U}) + \sum_{\substack{U \text{ tâche de} \\ \text{léopard sur } \overline{S_+} \\ \epsilon(U) = \epsilon}} \Theta_U(\phi_{+|U}) \right)_{\epsilon \in \{-, +\}}.$$

La passage d'une contraction infinitésimale à une contraction globale vient du fait que la distance de Teichmüller est finslérienne (voir [Gar, Chap. 7]). Ainsi la contraction de l'application d'épluchage est liée à celle d'applications  $\Theta$ .

#### A. SUR LES DOMAINES FONDAMENTAUX DE FORD

Par *domaine fondamental* d'un groupe discret  $\Gamma$  d'isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , nous entendrons dans ces notes une partie  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , adhérence de son intérieur, de frontière négligeable, telle que les  $\gamma\mathcal{F}$  pour  $\gamma \in \Gamma$  soient d'intérieurs deux à deux disjoints et recouvrent  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ .

Toute isométrie  $g$  de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  agit conformément sur son bord à l'infini  $\partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ , et donc pour tout  $\xi \in \mathbf{R}^{n-1}$  tel que  $g(\xi) \neq \infty$ , l'application tangente  $T_{\xi}g$  de  $g$  en  $\xi$  est une similitude de  $\mathbf{R}^{n-1}$  (composition d'une rotation et d'une dilatation). Lorsque  $g$  ne fixe pas l'infini, le lieu des points  $\xi$  où  $T_{\xi}g$  est une isométrie (c'est-à-dire une similitude de rapport 1) est une sphère  $S_g$  de  $\mathbf{R}^{n-1}$ , appelée *sphère isométrique*. Notons  $S_g^+$  celui des deux demi-espaces hyperboliques de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  contenant  $\infty$  à l'infini défini par l'hyperplan géodésique de bord à l'infini  $S_g$ . Par exemple, si  $g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ , alors  $S_g = \{z \in \partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 : |cz + d| = 1\}$  et  $S_g^+ = \{x = (z, r) \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 : |cz + d|^2 + r^2|c|^2 \geq 1\}$ .

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret d'isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , tel que  $\infty$  soit un point fixe parabolique de  $\Gamma$ . Soient  $\Gamma_{\infty}$  le stabilisateur de  $\infty$  dans  $\Gamma$  et  $\mathcal{F}_{\infty}$  un domaine fondamental de  $\Gamma_{\infty}$  dans  $\partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n - \{\infty\} = \mathbf{R}^{n-1}$ . Alors  $\mathcal{F}_{\Gamma} = (\mathcal{F}_{\infty} \times [0, +\infty[) \cap \bigcap_{g \in \Gamma - \Gamma_{\infty}} S_g^+$  est un domaine fondamental de  $\Gamma$ , appelé un *domaine fondamental de Ford* (voir par exemple [Bea, 9.6.2]).

## B. SUR LA FONCTION D'EULER

La fonction d'Euler  $\varphi : \mathbf{N} - \{0\} \rightarrow \mathbf{N} - \{0\}$  est l'application qui à  $n$  associe le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à  $n - 1$  et premiers avec  $n$ . Le nombre d'éléments d'ordre  $n$  du groupe cyclique  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est  $\varphi(n)$ . L'application qui à un groupe associe son ordre est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  dans l'ensemble des diviseurs de  $n$ . Donc en partitionnant  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  par la relation "engendrer le même sous-groupe", nous avons

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Notons  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  la fonction  $\zeta$  de Riemann, qui est holomorphe sur  $\{s \in \mathbf{C} : \mathrm{Re} s > 1\}$ , admet une extension méromorphe sur  $\mathbf{C}$  ayant un pôle simple de résidu 1 en  $s = 1$ , et vérifie  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ . Il découle de la formule précédente que, pour tout  $s > 2$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)},$$

car  $\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{n^s} = \sum_{m,d=1}^{\infty} \frac{\varphi(d)}{m^s d^s} = \zeta(s) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\varphi(d)}{d^s}$ .  
En particulier

$$\operatorname{Res}_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{2s}} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} = \frac{\lim_{s' \rightarrow 1} (s'-1)\zeta(s')}{2\zeta(2)} = \frac{3}{\pi^2}.$$

### C. SUR LE SPECTRE DES OPÉRATEURS NON BORNÉS

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert complexe. Un *opérateur (linéaire non borné)* de  $\mathcal{H}$  est une application linéaire  $T$  d'un sous-espace vectoriel  $D(T)$  de  $\mathcal{H}$  d'image un sous-espace vectoriel  $R(T)$  de  $\mathcal{H}$ . Si  $D(T)$  est dense, l'*adjoint*  $T^*$  de  $T$  est l'opérateur de  $\mathcal{H}$ , de domaine l'ensemble des  $y \in \mathcal{H}$  tels qu'il existe  $y^* \in \mathcal{H}$  tel que  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, y^* \rangle$  pour tout  $x \in D(T)$ , défini par  $T^*(y) = y^*$  (cet  $y^*$  est alors unique par densité de  $D(T)$ ). L'opérateur  $T$  est *auto-adjoint* si  $D(T)$  est dense et si  $T = T^*$  (ce qui implique que  $D(T) = D(T^*)$ ).

L'*ensemble résolvant* de  $T$  est l'ensemble des  $\lambda \in \mathbf{C}$  tels que  $T - \lambda id : D(T - \lambda id) \rightarrow \mathcal{H}$  soit bijectif, d'inverse continu. Le *spectre*  $\sigma(T)$  de  $T$  est le complémentaire de son ensemble résolvant. Il est contenu dans  $\mathbf{R}$  si  $T$  est auto-adjoint. Dans ce texte (comme dans [Rud, Chap. 13], mais d'autres conventions plus usuelles de terminologie existent, reposant sur le théorème spectral trop long à énoncer ici), nous le considérerons comme la réunion disjointe des parties suivantes :

- le *spectre ponctuel*  $\sigma_P(T)$  de  $T$ , qui est l'ensemble des valeurs propres de  $T$  (les  $\lambda \in \mathbf{C}$  tels que  $T - \lambda id$  ne soit pas injectif);
- le *spectre continu*  $\sigma_C(T)$  de  $T$ , qui est l'ensemble des  $\lambda \in \mathbf{C}$  tels que  $T - \lambda id$  soit injectif,  $R(T - \lambda id)$  soit dense dans  $\mathcal{H}$  mais l'inverse de  $T - \lambda id$  ne soit pas continu;
- le *spectre résiduel*  $\sigma_R(T)$  de  $T$ , qui est l'ensemble des  $\lambda \in \mathbf{C}$  tels que  $T - \lambda id$  soit injectif, et  $R(T - \lambda id)$  ne soit pas dense dans  $\mathcal{H}$ . Il est vide si  $T$  est auto-adjoint.

### BIBLIOGRAPHIE

- [Bab] BABILLOT, M. Géodésiques et horocycles sur le revêtement d'homologie d'une surface hyperbolique. *Sém. Théo. Spec. Géom. Grenoble 14* (1995-1996), 89–104.
- [Bea] BEARDON, A. F. *The geometry of discrete groups*. Grad. Texts Math. 91, Springer-Verlag 1983.
- [BGM] BERGER, M., GAUDUCHON, P. et MAZET, E. *Le spectre d'une variété riemannienne*. Lect. Notes Math 194, Springer-Verlag 1971.
- [Bow] BOWDITCH, B. Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Math. J.* 77 (1995), 229–274.

- [BrH] BRIDSON, M. et HAEFLIGER, A. *Metric spaces of non-positive curvature*. Grund. math. Wiss. 319, Springer-Verlag 1999.
- [BuM] BURGER, M. et MOZES, S. CAT( $-1$ ) spaces, divergence groups and their commensurators. *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), 57–94.
- [CLPS] CODGEL, J., LI, J. S., PIATETSKI-SHAPIRO, I. et SARNAK, P. Poincaré series for  $SO(n, 1)$ . *Acta Math.* 167 (1991), 229–285.
- [Cou] COUDENE, Y. Gibbs measures on negatively curved manifolds. *J. Dynam. Control Syst.* 9 (2003), 89–101.
- [DOP] DAL’BO, F., OTAL, J.-P. et PEIGNÉ, M. Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis. *Israel J. Math.* 118 (2000), 109–124.
- [EGM] ELSTRODT, J., GRUNEWALD, F. et MENNICKE, J. *Groups acting on hyperbolic space: Harmonic analysis and number theory*. Springer Mono. Math., Springer-Verlag 1998.
- [Fri] FRIEDBERG, S. Poincaré series for  $GL(n)$ : Fourier expansion, Kloosterman sums, and algebro-geometric estimates. *Math. Z.* 196 (1987), 165–188.
- [Gar] GARDINER, F. *Teichmüller theory and quadratic differentials*. Wiley, 1987.
- [GM] GUILLARMOU, C. et MAZZEO, R. Resolvent of the Laplacian on geometrically finite hyperbolic manifolds. *Invent. Math.* 187 (2012), 99–144.
- [Ham] HAMENSTÄDT, U. Cocycles, Hausdorff measures and cross ratios. *Erg. Theo. Dyn. Sys.* 17 (1997), 1061–1081.
- [Iwa] IWANIEC, H. *Topics in classical automorphic forms*. Grad. Stud. Math. 17, Amer. Math. Soc. 1997.
- [Kap] KAPOVICH, M. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*. Prog. Math. 183, Birkhäuser 2001.
- [Kat] KATOK, S. Closed geodesics, periods and arithmetic of modular forms. *Invent. Math.* 80 (1992), 469–480.
- [Kra] KRA, I. Deformation spaces. *A crash course on Kleinian groups*, pp. 48–70, Lecture Notes Math. 400, Springer-Verlag 1974.
- [Kub] KUBOTA, T. *Elementary theory of Eisenstein series*. Wiley 1973.
- [Lan] LANG, S.  $SL_2(\mathbf{R})$ . Addison-Wesley 1975.
- [Lan1] LANGLANDS, R. P. Eisenstein series. *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* (Boulder, 1965) pp. 235–252, Proc. Sympos. Pure Math. IX, Amer. Math. Soc. 1966.
- [Lan2] ——— The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups. *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* (Boulder, 1965) pp. 143–148, Proc. Sympos. Pure Math. IX, Amer. Math. Soc. 1966.
- [Led1] LEDRAPPIER, F. Structure au bord des variétés à courbure négative. *Sém. Théorie Spec. Géom. Grenoble 13*, Année 1994–1995, 97–122.
- [Led2] ——— Entropie et principe variationnel pour le flot géodésique en courbure négative pincée. Cet ouvrage.
- [McM1] MCMULLEN, C. Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps. *Invent. Math.* 97 (1989), 95–127.
- [McM2] ——— Iteration on Teichmüller space. *Invent. Math.* 99 (1990), 425–454.
- [Moh] MOHSEN, O. Le bas du spectre d’une variété hyperbolique est un point selle. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 40 (2007), 191–207.

- [PP1] PARKKONEN, J. et PAULIN, F. Équidistribution, comptage et approximation par irrationnels quadratiques. *J. Mod. Dyn.* 6 (2012), 1–40.
- [PP2] — On the arithmetic and geometry of binary Hamiltonian forms. Appendice de Vincent Emery. Prépublication [arXiv: 1105.2290], à paraître dans *Algebra & Number Theory*.
- [PP3] — Counting common perpendicular arcs in negative curvature. En preparation.
- [PPS] PAULIN, F., POLLICOTT, M. et SCHAPIRA, B. Equilibrium states in negative curvature. Prépublication (204 pages) [arXiv: 1211.6242].
- [Pei] PEIGNÉ, M. Autour de l'exposant critique d'un groupe Kleinien. Cet ouvrage.
- [Pra] PRASAD, G. Volumes of  $S$ -arithmetic quotients of semi-simple groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 69 (1989), 91–117.
- [Qui1] QUINT, J.-F. Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur. *Comment. Math. Helv.* 77 (2002), 563–608.
- [Qui2] — Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur. *GAF A* 12 (2002), 776–809.
- [Qui3] — Croissance des groupes d'isométries des espaces symétriques. Cet ouvrage.
- [Ran] RANKIN, R. A. Contributions to the theory of Ramanujan's function  $\tau(n)$  and similar arithmetical functions. I. The zeros of the function  $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)/n^s$  on the line  $\text{Re } s = 13/2$ . II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 35 (1939), 351–372.
- [Rob] ROBLIN, T. *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*. Mémoire Soc. Math. France 95, 2003.
- [RoT] ROBLIN, T. et TAPIE, S. Exposants critiques et moyennabilité. Cet ouvrage.
- [Rud] RUDIN, W. *Functional Analysis*. 2nd ed., McGraw-Hill, 1991.
- [Sar] SARNAK, P. The arithmetic and geometry of some hyperbolic three-manifolds. *Acta Math.* 151 (1983), 253–295.
- [Sel1] SELBERG, A. Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist. *Arch. Math. Naturvid.* 43 (1940), 47–50.
- [Sel2] — Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc.* 20 (1956), 47–87.
- [Sel3] — On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. *Number Theory: Proc. Symp. Pure Math* 8 (1965), 364–387.
- [Sie] SIEGEL, C. L. Indefinite quadratische Formen und Funktionen Theorie. *I Math. Ann* 124 (1951), 17–24, *II Math. Ann* 124 (1952), 364–387.
- [Ven] VENKOV, A. Spectral theory of automorphic functions. *Proc. Steklov Inst. Math.* 153, 1982.

Frédéric Paulin

Département de mathématique, Bât. 425, UMR 8628 CNRS  
 Université Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE  
*courriel*: frederic.paulin@math.u-psud.fr