

Dégénérescences de structures projectives complexes sur les surfaces,  
d'après D. Dumas

par Frédéric PAULIN

Le but de ces notes est d'exposer les jolis résultats de David Dumas [Dum2] sur les dégénérescences de structures projectives complexes sur les surfaces, avec un brin de topologie de Gromov équivariante, au sens de [Pau1].<sup>1)</sup>

Nous noterons  $\Sigma_g$  une surface (réelle, lisse) compacte connexe orientable de genre  $g \geq 2$  et  $\tilde{\Sigma}_g \rightarrow \Sigma_g$  un revêtement universel de  $\Sigma_g$ , de groupe des automorphismes de revêtement  $\Gamma_g$  (muni de la topologie discrète).

Le résultat principal de [Dum2], énoncé au corollaire 16 (3), est le suivant (nous définirons toutes les notions qui y apparaissent dans les parties 1 à 4).

**THÉORÈME 1.** *Soit  $([D_i, \rho_i])_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de structures projectives complexes sur  $\Sigma_g$ , d'applications développantes  $D_i$ , de représentations d'holonomie  $\rho_i$ , et soit  $\phi_i$  la différentielle quadratique holomorphe sur  $\Sigma_g$  obtenue en passant au quotient par  $\Gamma_g$  la dérivée schwarziennne de  $D_i$ . Supposons que la structure de surface de Riemann  $X$  sur  $\Sigma_g$  sous-jacente à  $\phi_i$  soit constante. Soit  $T$  un arbre réel muni d'une action isométrique de  $\Gamma_g$ , dont la classe d'homothétie équivariante est une valeur d'adhérence pour la compactification de Morgan-Shalen de la suite des caractères des représentations  $\rho_i$ . Alors il existe une valeur d'adhérence  $\phi$  de la suite  $(\frac{\phi_i}{\|\phi_i\|})_{i \in \mathbb{N}}$  dans l'espace de Banach des différentielles quadratiques holomorphes sur  $X$  et un morphisme d'arbres réels  $\Gamma_g$ -équivariant de l'arbre dual au feuilletage horizontal du relevé de  $\phi$  sur  $\tilde{\Sigma}_g$ , à valeurs dans  $T$ , à homothétie près. Ce morphisme est isométrique si les zéros de  $\phi$  sont simples.*

---

<sup>1)</sup> L'auteur remercie fortement le rapporteur pour l'incitation à écrire l'appendice A, donnant une nouvelle démonstration (qui doit être attribuée au rapporteur) de la proposition 12.

## 1. STRUCTURES PROJECTIVES COMPLEXES SUR LES SURFACES

## 1.1 DÉFINITIONS

Rappelons que le groupe de Lie complexe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$  agit fidèlement et holomorphiquement sur la droite projective complexe  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  par les homographies  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , et que le stabilisateur de l'ouvert  $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$  est  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ .

Une *structure projective complexe* sur une surface  $S$  est une  $(G, X)$ -structure sur  $S$  où  $X = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  et  $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ , c'est-à-dire un atlas maximal de cartes lisses de  $S$  à valeurs dans  $X$  dont les applications de changement de cartes sont localement des restrictions d'éléments de  $G$ . Un *isomorphisme* de  $(G, X)$ -structures est un homéomorphisme qui envoie atlas sur atlas par précomposition. Le groupe des difféomorphismes de  $S$  agit sur l'ensemble des structures projectives complexes sur  $S$  par précomposition des cartes.

Pour toute structure projective complexe sur  $\Sigma_g$ , il existe (voir par exemple [Thu, §3.4]) un couple  $(D, \rho)$  où  $\rho : \Gamma_g \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  est un morphisme de groupes, appelé sa *représentation d'holonomie*, et  $D : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  est une immersion lisse équivariante<sup>2</sup>), qui est localement un isomorphisme de structures projectives complexes, appelée son *application développante*. Par analyticité, l'application développante  $D$  détermine la représentation d'holonomie  $\rho$ , mais mettre en avant le couple  $(D, \rho)$  est utile. Ce couple est uniquement défini modulo l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  où  $\alpha \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  agit par  $(D, \rho) \mapsto (\alpha \circ D, \alpha \rho \alpha^{-1})$ .

Nous noterons  $\mathbf{CP}_1(\Sigma_g)$  le quotient de l'ensemble des structures projectives complexes sur  $\Sigma_g$  par le groupe  $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$  des *isotopies*<sup>3</sup> de  $\Sigma_g$ . Ainsi  $\mathbf{CP}_1(\Sigma_g)$  est identifié à l'ensemble des classes  $[D, \rho]$  de couples  $(D, \rho)$  où  $\rho : \Gamma_g \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  est un morphisme de groupes et  $D : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  est une immersion équivariante, modulo l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  ci-dessus et la précomposition de  $D$  par un difféomorphisme  $\Gamma_g$ -équivariant de  $\tilde{\Sigma}_g$ . Nous munirons  $\mathbf{CP}_1(\Sigma_g)$  de la topologie quotient de la topologie produit des topologies compactes-ouvertes sur les  $D$  et sur les  $\rho$ .

Notons  $\mathcal{T}(\Sigma_g)$  l'*espace de Teichmüller* de  $\Sigma_g$ , c'est-à-dire le quotient de l'ensemble des structures de surface de Riemann sur  $\Sigma_g$  par  $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ , muni de la topologie quotient de la topologie  $C^\infty$  sur les sections du fibré des endomorphismes du fibré tangent réel de  $\Sigma_g$  (données par les multiplications

<sup>2</sup>) Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles munis d'une action d'un groupe  $H$ , une application  $f : E \rightarrow F$  est dite  $(H)$ -équivariante si pour tous les  $x \in E$  et  $h \in H$ , nous avons  $f(hx) = hf(x)$ . Si l'action de  $G$  sur  $F$  est triviale, nous dirons aussi que  $f$  est  $(H)$ -invariante.

<sup>3</sup>) Une *isotopie* de  $\Sigma_g$  est un difféomorphisme de  $\Sigma_g$  isotope à l'identité (ou, de manière équivalente, homotope à l'identité).

par  $i$ ). Puisque les homographies sont holomorphes, toute structure projective complexe sur une surface  $S$  définit une structure de surface de Riemann sur  $S$ , dite *sous-jacente*. D'où une application continue d'affaiblissement de structure

$$\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{T}} : \mathbf{CP}_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma_g).$$

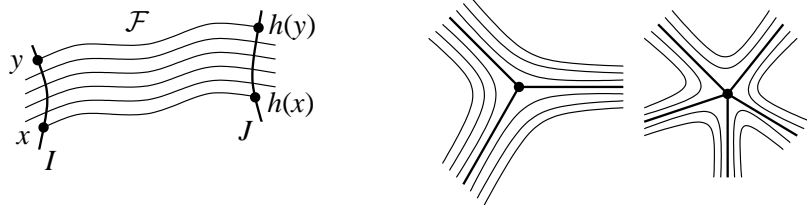
Si  $X$  est une structure de surface de Riemann sur  $\Sigma_g$ , nous noterons  $[X]$  la classe de  $X$  dans  $\mathcal{T}(\Sigma_g)$  et  $\mathbf{CP}_1(X)$  la fibre de  $\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{T}}$  au-dessus de  $[X]$ .

Le *groupe modulaire*  $\text{Mod}(\Sigma_g) = \text{Diff}_+(\Sigma_g)/\text{Diff}_0(\Sigma_g)$  de  $\Sigma_g$  agit naturellement (à droite) sur  $\mathbf{CP}_1(\Sigma_g)$  et sur  $\mathcal{T}(\Sigma_g)$  par passage au quotient des précompositions de structures. L'application  $\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{T}}$  est  $\text{Mod}(\Sigma_g)$ -équivariante, et admet une section continue équivariante, dite *fuchsienne*, par le théorème d'uniformisation des structures complexes relevées sur  $\Sigma_g$ . L'image de cette section est formée des  $[D, \rho]$  où  $D$  est un difféomorphisme sur le disque ouvert unité de  $\mathbf{C}$  et  $\rho(\Gamma_g)$  est contenu dans  $\text{PSL}_2(\mathbf{R})$ .

Après avoir introduit les objets utiles, nous donnerons un paramétrage de l'espace  $\mathbf{CP}_1(\Sigma_g)$ , qui montrera en particulier qu'il est homéomorphe à  $\mathbf{R}^{12g-12}$ . Nous renvoyons à [Dum1] pour tout complément sur la partie 1.

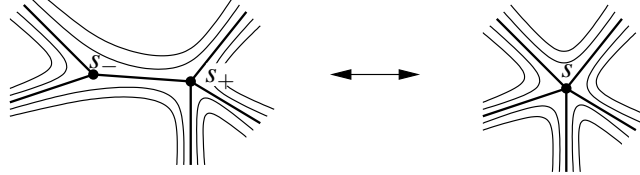
### 1.2 FEUILLETAGES MESURÉS

Soit  $S$  une surface. Un *feuilletage mesuré* (voir par exemple [FLP, Exp. 5]) de  $S$  est un feuilletage  $\mathcal{F}$  de dimension 1 de  $S$  privée d'une partie discrète  $A$ , muni d'une *mesure transverse*  $\mu$ , c'est-à-dire pour tout arc transverse  $I$  de  $\mathcal{F}$  d'une mesure  $\mu_I$  sur  $I$ , de support total et sans atome, qui sont invariantes par les restrictions (si  $J \subset I$ , alors  $(\mu_I)|_J = \mu_J$ ) et par le pseudo-groupe d'holonomie transverse (si  $h : I \rightarrow J$  est une application d'holonomie le long de feuilles entre deux arcs transverses, alors  $h_*\mu_I = \mu_J$ , voir le dessin de gauche ci-dessous), à singularités de type selle à au moins 3 branches en tout point de  $A$  (voir les dessins de droite ci-dessous).



Nous noterons  $\mathcal{MF}_g$  l'ensemble des classes d'équivalence de feuilletages mesurés de  $\Sigma_g$  pour la relation d'équivalence engendrée par l'action des isotopies et des *mouvements de Whitehead* d'écrasements de connexions de selle ou leurs inverses (bien définies à isotopie près, voir le dessin ci-dessous).

Nous le munissons de la topologie quotient de la topologie  $C^\infty$  des feuilletages et la topologie vague (faible-étoile) des mesures transverses.



### 1.3 DIFFÉRENTIELLES QUADRATIQUES HOLOMORPHES

Soit  $Y$  une surface de Riemann. Une *différentielle quadratique holomorphe* (voir par exemple [Gar, §1]) sur  $Y$  est une section holomorphe  $\phi$  du fibré vectoriel holomorphe  $K_Y^2$  des 2-formes holomorphes sur  $Y$ , c'est-à-dire la donnée pour toute carte locale  $(U, z)$  de  $Y$  d'une application holomorphe  $\phi_{U,z} : U \rightarrow \mathbb{C}$  telle que si  $(V, w)$  est une autre carte locale, alors  $\phi_{V,w}(w) dw^2 = \phi_{U,z}(z) dz^2$  sur  $U \cap V$ . Nous noterons par abus encore  $\phi$  l'application  $\phi_{U,z}$  pour toute carte locale  $(U, z)$  de  $Y$ . Si  $Z$  est une surface de Riemann et  $f : Z \rightarrow Y$  est holomorphe, notons  $f^*\phi$  la différentielle quadratique holomorphe sur  $Z$  telle que si  $(U, z)$  et  $(V, w)$  sont des cartes locales de  $Y$  et  $Z$  telles que  $f(V) \subset U$ , alors  $(f^*\phi)_{V,w} = \phi_{U,z} \circ f|_V (f')^2$ .

Si  $Y$  est compacte connexe de genre  $g$ , le théorème de Riemann-Roch implique que la dimension de l'espace vectoriel complexe  $\mathcal{Q}(Y)$  des différentielles quadratiques holomorphes sur  $Y$  est  $3g-3$ . Cet espace vectoriel est alors muni d'une norme naturelle  $\|\phi\|$ , qui est la masse totale de la mesure qui dans une carte locale  $(U, z)$  s'écrit  $|\phi_{U,z}(z)| |dz|^2$ .

Une *différentielle quadratique holomorphe* sur la surface lisse  $\Sigma_g$  est la donnée d'une structure de surface de Riemann  $X$  sur  $\Sigma_g$  et d'une différentielle quadratique holomorphe  $\phi$  sur  $X$ . Le groupe des difféomorphismes de  $\Sigma_g$  agit naturellement sur l'ensemble des différentielles quadratiques holomorphes sur  $\Sigma_g$ . Nous noterons  $\mathcal{Q}(\Sigma_g)$  le quotient de cet ensemble par le groupe  $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$  des isotopies de  $\Sigma_g$ , muni de la topologie quotient de la topologie produit des topologies compactes-ouvertes. La première projection  $(X, \phi) \mapsto X$  induit une application d'oubli continue  $\text{Mod}(\Sigma_g)$ -équivariante

$$\theta_{\mathcal{Q}/\mathcal{T}} : \mathcal{Q}(\Sigma_g) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma_g).$$

Les espaces  $\mathcal{Q}(\Sigma_g)$  et  $\mathcal{T}(\Sigma_g)$  admettent (voir [Gar, §5]) des structures de variétés holomorphes, rendant les actions de  $\text{Mod}(\Sigma_g)$  par biholomorphismes, qui font de  $\theta_{\mathcal{Q}/\mathcal{T}}$  un fibré vectoriel holomorphe, la fibre au-dessus de  $[X] \in \mathcal{T}(\Sigma_g)$  étant  $\mathcal{Q}(X)$ . L'espace de Teichmüller est homéomorphe à  $\mathbf{R}^{6g-6}$

(voir par exemple [FLP, Exp. 7]), donc  $\mathcal{Q}(\Sigma_g)$  est homéomorphe à  $\mathbf{R}^{12g-12}$ .

Étudions les propriétés géométriques des différentielles quadratiques holomorphes (voir [Gar, §2]). Fixons un élément  $\phi \in \mathcal{Q}(Y)$  non nul. En particulier, l'ensemble  $\phi^{-1}(0)$  de ses zéros est discret (donc fini si  $Y$  est compacte).

Si  $x_0 \in Y$  n'est pas un zéro de  $\phi$ , alors il existe une carte locale  $(U, z)$  de la surface de Riemann  $Y$  au voisinage de  $x_0$  telle que  $z(x_0) = 0$  et  $\phi = dz^2$  sur  $U$ . Une telle carte locale est uniquement définie modulo l'action du groupe des  $z \mapsto \pm z + z_0$ . Puisque ce groupe préserve la métrique euclidienne de  $\mathbf{C}$ , ceci munit  $Y - \phi^{-1}(0)$  d'une *structure plate* (d'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante nulle). La norme  $\|\phi\|$  est égale à l'aire riemannienne totale de cette structure plate.

Si  $x_0 \in Y$  est un zéro d'ordre  $k \geq 1$  de  $\phi$ , alors il existe une carte locale  $(U, z)$  de la surface de Riemann  $Y$  au voisinage de  $x_0$  telle que  $z(x_0) = 0$  et  $\phi(z) = z^k dz^2$ . La surface plate  $Y - \phi^{-1}(0)$  a une singularité conique d'angle  $(k+2)\pi$  en  $x_0$ . Notons  $d_\phi$  la distance sur  $Y$  définie par cette structure plate à singularités coniques (borne inférieure des longueurs euclidiennes des chemins entre deux points qui sont  $C^1$  par morceaux et ne passent qu'un nombre fini de fois par les singularités). Pour tout  $t > 0$ , nous avons  $d_{t\phi} = \sqrt{t} d_\phi$ .

Les transformations  $z \mapsto \pm z + z_0$  préservent les droites horizontales. Les cartes locales  $(U, z)$  ci-dessus définissent donc, en prenant les images réciproques des droites horizontales, un feuilletage  $\mathcal{F}_\phi$  de dimension 1 de  $Y - \phi^{-1}(0)$ , dont les feuilles locales sont les composantes connexes des courbes d'équation  $\text{Im } z = c$  pour  $c \in \mathbf{R}$ , qui en tout zéro d'ordre  $k \geq 1$  de  $\phi$  admet une singularités de type selle à  $k+2$  branches.

Les transformations  $z \mapsto \pm z + z_0$  préservent les mesures de Lebesgue sur les droites verticales. Tout arc transverse au feuilletage par droites horizontales de  $\mathbf{R}^2$  peut être poussé par holonomie le long des feuilles sur un arc vertical. Les cartes locales  $(U, z)$  ci-dessus définissent donc une mesure transverse  $\mu_\phi$  pour ce feuilletage: si  $c : [0, 1] \rightarrow Y$  est un chemin transverse par morceaux, d'image contenue dans  $U$ , sa mesure transverse est

$$\int_0^1 |\text{Im}(z \circ c(t))| dt.$$

Nous noterons  $(\mathcal{F}_\phi, \mu_\phi)$  ou  $\mathcal{F}_\phi$  par abus ce feuilletage mesuré, que nous appellerons le *feuilletage horizontal* de  $\phi$ . Pour tout  $t > 0$ , nous avons  $(\mathcal{F}_{t\phi}, \mu_{t\phi}) = (\mathcal{F}_\phi, \sqrt{t} \mu_\phi)$ .

Nous renvoyons par exemple à [Gar, §11.1] pour le résultat suivant, qui dit qu'à structure complexe sous-jacente fixée, une différentielle quadratique holomorphe non nulle est caractérisée par son feuilletage horizontal.

THÉORÈME 2 (Hubbard-Mazur). *Soit  $X$  une structure de surface de Riemann sur  $\Sigma_g$ . L'application de  $\mathcal{Q}(X) - \{0\}$  dans  $\mathcal{MF}_g$  définie par  $\phi \mapsto \mathcal{F}_\phi$  est un homéomorphisme.  $\square$*

#### 1.4 DÉRIVÉE SCHWARZIENNE ET PARAMÉTRAGE DE $\mathbf{CP}_1(\Sigma_g)$ PAR $\mathcal{Q}(\Sigma_g)$

La dérivée schwarzienne d'une immersion holomorphe entre surfaces de Riemann est son obstruction à être localement projective (voir par exemple [OT2, OT1 §1.3]). Elle est fondamentale en analyse complexe (pour définir la structure holomorphe de  $\mathcal{T}(\Sigma_g)$ , voir [Gar, p. 99], pour l'uniformisation, voir [Sai, p. 149], et pour d'autres aspects des fonctions univalentes, voir [Leh]) et en systèmes dynamiques (en version réelle), voir [dMvS, §III.3].

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  une application holomorphe localement injective. La *dérivée schwarzienne* de  $f$  est la différentielle quadratique holomorphe sur  $\Omega$  définie par

$$Sf = \left( \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \right) dz^2 .$$

Nous avons  $Sf = 0$  si et seulement si  $f$  est localement restriction d'homographies. Elle vérifie la propriété de cocycle

$$S(f \circ g) = g^*(Sf) + Sg .$$

Soit  $X$  une structure de surface de Riemann sur  $\Sigma_g$ . Notons  $\tilde{X}$  la structure de surface de Riemann relevée sur  $\tilde{\Sigma}_g$ , identifiée par uniformisation au demi-plan ouvert supérieur  $\mathbf{H}$  de  $\mathbf{C}$ . Si  $D : \tilde{X} \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  est une application développante d'une structure projective complexe sur  $X$ , de représentation d'holonomie  $\rho$ , alors  $SD$  est une différentielle quadratique holomorphe sur  $\tilde{X}$ , invariante par l'action de  $\Gamma_g$  : puisque  $\gamma \in \Gamma_g$  agit par homographies sur  $\tilde{X}$  et  $\rho(\gamma)$  par homographies sur  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ , nous avons

$$\gamma^*(SD) = S(D \circ \gamma) = S(\rho(\gamma) \circ D) = SD .$$

Donc  $\tilde{\phi} = SD$  passe au quotient en une différentielle quadratique holomorphe  $\phi = SD \bmod \Gamma_g$  sur  $X$ . La classe d'isotopie de celle-ci ne dépend que de la classe  $[D, \rho]$ , d'où une application de  $\mathbf{CP}_1(X)$  dans  $\mathcal{Q}(X)$ . Le théorème de dépendance continue de solutions d'équations différentielles montre que cette application est un homéomorphisme.

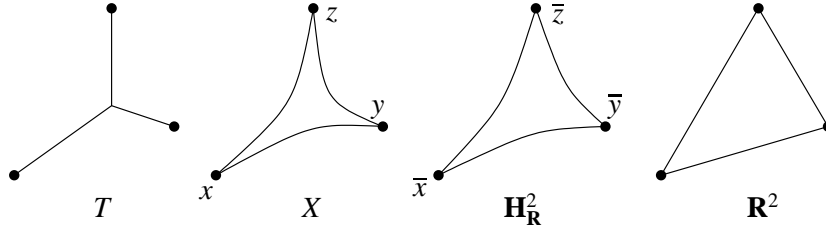
Le choix d'une section continue  $\text{Mod}(\Sigma_g)$ -équivariante de  $\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{T}}$  permet de recoller ces homéomorphismes lorsque la structure complexe sous-jacente varie, pour obtenir un homéomorphisme  $\text{Mod}(\Sigma_g)$ -équivariant  $\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{Q}} : \mathbf{CP}_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathcal{Q}(\Sigma_g)$  qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{CP}_1(\Sigma_g) & \xrightarrow{\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{Q}}} & \mathcal{Q}(\Sigma_g) \\
 \theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{T}} \searrow & & \swarrow \theta_{\mathcal{Q}/\mathcal{T}} \\
 & \mathcal{T}(\Sigma_g) &
 \end{array}$$

## 2. AUPRÈS DE MON ARBRE

Découverts par Bruhat-Tits (voir par exemple [Tit]) et popularisés par Morgan-Shalen [MS1, MS2] (voir les survols [Sha1, Sha2, Mor, Bes2, Pau3]), les *arbres réels* sont les espaces métriques uniquement connexes par arc, dans lequel tout arc est isométrique à un intervalle de  $\mathbf{R}$ .

Nous renvoyons par exemple à [BH, §I.1, §III.H.1, §II.1, §II.8, §III.H.3, §II.6] pour tout complément (dont les démonstrations nécessaires) aux rappels ci-dessous sur les espaces géodésiques, hyperboliques,  $\text{CAT}(-\kappa)$ , leur bord à l'infini, leurs isométries. Un espace métrique  $X$  est *géodésique* si pour tous les  $x, y \in X$ , il existe un (pas forcément unique) *segment géodésique* d'extrémités  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire un chemin isométrique  $c : [a, b] \rightarrow X$  tel que  $c(a) = x$  et  $c(b) = y$ ; par abus, son image sera notée  $[x, y]$ . Pour tout  $\delta \geq 0$ , un espace métrique géodésique  $X$  est  $\delta$ -*hyperbolique* si pour tous les  $x, y, z \in X$  et tous les segments géodésiques  $[x, y], [y, z], [z, x]$ , chacun de ces segments est contenu dans le  $\delta$ -voisinage fermé de la réunion des deux autres. Pour tout  $n \geq 2$ , l'espace hyperbolique réel  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  (à courbure sectionnelle constante  $-1$ ) est  $\ln(1 + \sqrt{2})$ -hyperbolique (constante optimale). Les arbres réels sont les espaces métriques géodésiques 0-hyperboliques.



Rappelons qu'un *espace*  $\text{CAT}(-1)$  (respectivement  $\text{CAT}(0)$ ) est un espace métrique géodésique tel que pour tous les  $x, y, z \in X$  et tous les segments géodésiques  $[x, y], [y, z], [z, x]$ , si  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2$  (respectivement  $\mathbf{R}^2$ ) sont tels que  $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$ ,  $d(\bar{y}, \bar{z}) = d(y, z)$  et  $d(\bar{x}, \bar{z}) = d(x, z)$ , alors pour tout  $p \in [x, y]$ , si  $\bar{p} \in [\bar{x}, \bar{y}]$  vérifie  $d(\bar{x}, \bar{p}) = d(x, p)$ , alors  $d(p, z) \leq d(\bar{p}, \bar{z})$ . Tout espace  $\text{CAT}(-1)$  est  $\ln(1 + \sqrt{2})$ -hyperbolique. Tout arbre réel est  $\text{CAT}(-1)$ . Si  $\phi$  est une différentielle quadratique holomorphe sur une surface de Riemann  $Y$ , alors l'espace métrique  $(Y, d_\phi)$  est localement  $\text{CAT}(0)$ , et globalement  $\text{CAT}(0)$  si  $Y$  est simplement connexe.

Soit  $X$  un espace  $\text{CAT}(0)$ . Un *rayon* (resp. une *droite*) *géodésique* dans  $X$  est une application isométrique de  $[0, +\infty[$  (resp.  $\mathbf{R}$ ) dans  $X$ . Notons  $\partial_\infty X$  le *bord à l'infini* de  $X$  : c'est l'ensemble des classes de rayons géodésiques pour la relation «être à distance de Hausdorff finie», muni de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte. Nous munissons la réunion disjointe  $X \cup \partial_\infty X$  de l'unique topologie métrisable, induisant les topologies précédentes sur  $X$  et sur  $\partial_\infty X$ , telle qu'une suite  $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  dans  $X$  converge vers la classe d'un rayon géodésique  $\rho$  si et seulement si la suite de segments géodésiques entre  $\rho(0)$  et  $x_i$  qui stationne en  $x_i$  converge vers  $\rho$  pour la convergence uniforme sur les compacts des applications continues de  $[0, +\infty[$  dans  $X$ . Si  $X$  est *propre* (c'est-à-dire si ses boules fermées sont compactes), alors  $X \cup \partial_\infty X$  est compact, et appelé la *compactification géodésique* de  $X$ .

Soit  $\gamma$  une isométrie de  $X$ . Nous noterons encore  $\gamma$  l'unique extension continue de  $\gamma$  à  $X \cup \partial_\infty X$ . La *distance de translation* de  $\gamma$  est

$$\ell(\gamma) = \inf_{x \in X} d(x, \gamma x).$$

L'isométrie  $\gamma$  est (voir [BH, §II.6])

- *elliptique* si elle admet un point fixe, auquel cas  $\ell(\gamma) = 0$ ;
- *hyperbolique* si la borne inférieure définissant  $\ell(\gamma)$  est atteinte et si  $\ell(\gamma) > 0$ ; il existe alors au moins une (image de) droite géodésique sur laquelle  $\gamma$  agit par translation de distance  $\ell(\gamma)$ , appelée *un axe de translation* de  $\gamma$ ; si  $X$  est  $\text{CAT}(-1)$ , il est unique, c'est l'ensemble des points  $x$  de  $X$  tels que  $d(x, \gamma^2 x) = 2d(x, \gamma x)$ ;
- *parabolique* sinon. Les arbres réels n'en ont pas. Si  $X$  est  $\text{CAT}(-1)$  et propre, alors  $\ell(\gamma) = 0$  et  $\gamma$  admet un unique point fixe dans  $\partial_\infty X$ .

Soit  $\rho$  une action isométrique d'un groupe  $\Gamma$  sur  $X$ . Nous appellerons *fonction distance de translation*, et noterons  $\ell_\rho$  (ou  $\ell_X$  par abus quand  $\rho$  est sous-entendue) l'application  $\gamma \mapsto \ell(\rho(\gamma))$  de  $\Gamma$  dans  $[0, +\infty[$ . Notons que pour toute isométrie  $\gamma$  de  $X$ , nous avons  $\ell_{\gamma\rho\gamma^{-1}} = \ell_\rho$ .

Nous renvoyons par exemple à [Sha1, Sha2, Mor, Bes2, Pau3] pour tout complément (dont les démonstrations nécessaires) aux rappels ci-dessous sur les arbres réels. Si  $T$  est un arbre réel, une action  $\rho$  d'un groupe sur  $T$  est dite *minimale* (au sens des arbres) si elle n'admet pas de sous-arbre non vide propre invariant. Si  $\ell_\rho$  n'est pas identiquement nulle (quand  $\Gamma$  est de type fini, ceci est équivalent à demander que  $\rho$  n'ait pas de point fixe global), alors  $T$  admet un unique sous-arbre invariant minimal, qui est la réunion des axes de translation de  $T$ . Le complété d'un arbre réel est encore un arbre réel (et les actions isométriques de groupes s'étendent), mais un arbre réel muni d'une action minimale d'un groupe n'est en général pas complet.



Soient  $T$  et  $T'$  deux arbres réels. Une application continue  $f : T \rightarrow T'$  est un *morphisme d'arbres réels* (voir [MO]) si tout segment géodésique de  $T$  peut être subdivisé en un nombre fini de segments géodésiques  $I_1, \dots, I_k$  en restriction auxquels  $f$  est isométrique. La composition de deux morphismes d'arbres réels est un morphisme d'arbres réels.

EXEMPLE. Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage mesuré de  $\Sigma_g$ , et  $\tilde{\mathcal{F}}$  le feuilletage mesuré de  $\tilde{\Sigma}_g$  relevé. Pour tout chemin  $c$  transverse par morceaux à  $\tilde{\mathcal{F}}$ , notons  $|c|_{\tilde{\mathcal{F}}}$  sa mesure transverse totale (somme des mesures transverses de chacun de ses morceaux transverses). Nous appellerons *pseudo-distance transverse* entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\tilde{\Sigma}_g$  pour  $\tilde{\mathcal{F}}$  la quantité

$$\delta_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y) = \inf_c \{ |c|_{\tilde{\mathcal{F}}} \},$$

où la borne inférieure porte sur les courbes  $c$  transverses par morceaux à  $\tilde{\mathcal{F}}$  allant de  $x$  à  $y$ . C'est une *pseudo-distance*: elle vérifie tous les axiomes des distances sauf celui de séparation. L'*arbre dual* à  $\mathcal{F}$  est l'espace métrique quotient canonique

$$T_{\tilde{\mathcal{F}}} = \tilde{\Sigma}_g / \sim,$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence  $x \sim y$  si et seulement si  $\delta_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y) = 0$ , muni de la distance quotient  $\delta_{\tilde{\mathcal{F}}}([x], [y]) = \delta_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont n'importe quels représentants des classes  $[x]$  et  $[y]$ . C'est le plus gros quotient séparé de  $\tilde{\Sigma}_g$  muni de la structure uniforme définie par la pseudo-distance  $\delta_{\tilde{\mathcal{F}}}$  (voir [Bourb]). Nous noterons  $\pi_{\tilde{\mathcal{F}}} : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow T_{\tilde{\mathcal{F}}}$  la projection canonique. L'action de  $\Gamma_g$  sur  $\tilde{\Sigma}_g$ , qui est isométrique pour la pseudo-distance  $\delta_{\tilde{\mathcal{F}}}$ , passe au quotient en une action isométrique de  $\Gamma_g$  sur  $T_{\tilde{\mathcal{F}}}$ .

Nous rassemblons dans la proposition suivante les propriétés des arbres duaux, dus à Morgan-Shalen [MS1, MS2], Gillet-Shalen [GS] et Morgan-Otal [MO], voir aussi [LP] pour une généralisation. Nous appellerons par abus *feuille singulière* d'un feuilletage mesuré d'une surface toute union connexe par arcs maximale de feuilles et de singularités.

PROPOSITION 3. (1) *Toute feuille et feuille singulière de  $\tilde{\mathcal{F}}$  est propre, et pour tous les  $x$  et  $y$  dans  $\tilde{\Sigma}_g$ , nous avons  $\pi_{\tilde{\mathcal{F}}}(x) = \pi_{\tilde{\mathcal{F}}}(y)$  si et seulement si  $x$  et  $y$  appartiennent à la même feuille ou à la même feuille singulière.*

(2) *L'espace métrique  $T_{\tilde{\mathcal{F}}}$  est un arbre réel, et l'action isométrique de  $\Gamma_g$  sur  $T_{\tilde{\mathcal{F}}}$  est minimale (au sens des arbres).*

(3) *Tout arc transverse à  $\tilde{\mathcal{F}}$  s'injecte par  $\pi_{\tilde{\mathcal{F}}}$  dans  $T_{\tilde{\mathcal{F}}}$ .*

(4) Pour tout arbre réel  $T$  muni d'une action isométrique de  $\Gamma_g$ , toute application  $\Gamma_g$ -équivariante  $\tilde{f} : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow T$  qui est constante sur les feuilles et isométrique sur tout arc transverse (muni de la pseudo-distance transverse) induit par passage au quotient un morphisme d'arbres réels  $\Gamma_g$ -équivariant  $f : T_{\tilde{\mathcal{F}}} \rightarrow T$ .  $\square$

Cette dernière assertion dit que les “pliages” de  $f$  ne peuvent avoir lieu qu'aux images dans  $T_{\tilde{\mathcal{F}}}$  des singularités de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . En particulier, si  $\tilde{\mathcal{F}}$  n'a que des singularités à 3 branches, alors  $f$  est isométrique.

Notons  $\mathcal{A}_{\text{cyc}}(\Gamma_g)$  l'ensemble des classes d'isométries équivariantes d'actions isométriques minimales de  $\Gamma_g$  sans point fixe global sur des arbres réels, dont les stabilisateurs de segments géodésiques non triviaux sont cycliques. Nous le munirons plus tard d'une topologie. Le résultat suivant (voir [Sko]) dit qu'un feuilletage mesuré de  $\Sigma_g$  est caractérisé, à isotopie et mouvement de Whitehead près, par son arbre dual.

THÉORÈME 4 (Skora). *L'application de  $\mathcal{MF}_g$  dans  $\mathcal{A}_{\text{cyc}}(\Gamma_g)$ , qui à la classe d'un feuilletage mesuré  $\mathcal{F}$  associe la classe de son arbre dual  $T_{\tilde{\mathcal{F}}}$ , est un homéomorphisme.  $\square$*

### 3. EN ROUTE VERS L'INFINI

Les ultrafiltres (introduits par H. Cartan) sur  $\mathbf{N}$  sont un moyen magique de sélectionner des valeurs d'adhérences de suites. Soit  $\omega$  un *ultrafiltre*<sup>4</sup> sur  $\mathbf{N}$ , *non principal* (c'est-à-dire contenant les complémentaires de parties finies), qui existe par le lemme de Zorn. Une suite  $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  dans un espace topologique  $E$  converge vers  $x \in E$  suivant le filtre  $\omega$  si pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe  $I \in \omega$  tel que  $x_i \in V$  pour tout  $i \in I$ , et on note  $x = \lim_{\omega} x_i$ .

PROPOSITION 5. *Soit  $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  une suite d'un espace topologique  $E$ .*

(1) *Pour toute valeur d'adhérence  $\ell$  de  $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  dans  $E$ , il existe un ultrafiltre non principal  $\omega$  sur  $\mathbf{N}$  tel que  $\lim_{\omega} x_i = \ell$  (voir [Bourb, Chap. I, §7, Prop. 8]).*

(2) *Si  $E$  est compact<sup>5</sup>, pour tout ultrafiltre non principal  $\omega$  sur  $\mathbf{N}$ , il existe un et un seul  $\ell \in E$  tel que  $\lim_{\omega} x_i = \ell$ , et  $\ell$  est une valeur d'adhérence de  $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  (voir [Bourb, Chap. I, §9, n° 1]).  $\square$*

<sup>4</sup>) Un *filtre* est un ensemble non vide de parties non vides, stable par intersections finies et passage à la surpartie. Un *ultrafiltre* est un filtre maximal (pour l'inclusion), voir [Bourb, Ch. I].

<sup>5</sup>) Un espace topologique (localement) compact est séparé, par définition.

Rappelons que l'espace  $[-\infty, +\infty]$  est compact, donc toute suite réelle admet une limite suivant  $\omega$  dans cet espace.

Suite à l'interprétation logique par van der Dries et Wilkie [DW] de son article [Gro1], Gromov a introduit dans [Gro2, §2] une notion de limite d'actions isométriques sur des espaces métriques variables.

Soient  $\Gamma$  un groupe fixé et  $(X_i, d_i, *_i, \rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces métriques  $(X_i, d_i)$  pointés en  $*_i$  munis d'une action isométrique  $\rho_i$  de  $\Gamma$  (ne préservant pas forcément le point base), telle que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\lim_{\omega} d_i(*_i, \rho_i(\gamma)*_i) < +\infty .$$

Considérons l'ensemble

$$X_{\infty} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i : \lim_{\omega} d_i(*_i, x_i) < +\infty\}$$

pointé en  $*_{\infty} = (*_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , muni de la pseudo-distance (qui en est bien une),

$$d_{\infty}(x, y) = \lim_{\omega} d_i(x_i, y_i)$$

où  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , et de l'action diagonale  $\alpha_{\infty}$  de  $\Gamma$  définie par

$$\alpha_{\infty}(\gamma)(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (\rho_i(\gamma)x_i)_{i \in \mathbb{N}} ,$$

qui est isométrique pour la pseudo-distance  $d_{\infty}$ . L'*ultralimite*  $(X_{\omega}, d_{\omega}, *_\omega, \rho_{\omega})$  de la suite  $(X_i, d_i, *_i, \rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$  suivant  $\omega$  est l'espace métrique quotient canonique

$$X_{\omega} = X_{\infty} / \sim$$

où  $x \sim y$  si et seulement si  $d_{\infty}(x, y) = 0$ , muni de la distance quotient

$$d_{\omega}([x], [y]) = d_{\infty}(x, y) ,$$

où  $[x], [y]$  sont les classes d'équivalence de  $x, y \in X_{\infty}$ , pointé en la classe d'équivalence  $*_{\omega}$  de  $*_{\infty}$ , muni de l'action isométrique quotient de  $\Gamma$  définie par

$$\rho_{\omega}(\gamma)[x] = [\rho_{\infty}(\gamma)x] .$$

Nous noterons  $[x_i]$  la classe d'équivalence d'un élément  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_{\infty}$ .

Cette ultralimite est en fait une limite suivant le filtre  $\omega$  de la suite considérée, pour la topologie suivante (voir [Paul]). Rappelons qu'une *correspondance*  $\mathcal{R}$  entre deux ensembles  $E$  et  $F$  est une relation  $\mathcal{R} \subset E \times F$  dont les deux projections sur  $E$  et sur  $F$  sont surjectives.

Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble d'espaces métriques munis d'une action isométrique de  $\Gamma$  (ou un ensemble de classes d'isométrie équivariante de tels objets).

Pour tout  $X$  dans  $\mathcal{E}$ , pour toutes les parties finies  $K$  de  $X$  et  $P$  de  $\Gamma$ , et pour tout  $\epsilon > 0$ , notons  $\mathcal{V}_{K,P,\epsilon}(X)$  l'ensemble des  $X' \in \mathcal{E}$  tels qu'il existe une partie finie  $K'$  dans  $X'$  et une correspondance  $\mathcal{R}$  entre  $K$  et  $K'$  telle que, pour tous les  $x, y \in X$ ,  $x', y' \in X'$  et  $\gamma \in P$ , si  $x \mathcal{R} x'$  et  $y \mathcal{R} y'$ , alors  $|d(x, \gamma y) - d(x', \gamma y')| < \epsilon$ . L'ensemble des  $\mathcal{V}_{K,P,\epsilon}(X)$ , pour les parties finies  $K$  de  $X$  et  $P$  de  $\Gamma$ , et les  $\epsilon > 0$ , est un système fondamental de voisinages de  $X$  pour une topologie sur  $\mathcal{E}$ , appelée la *topologie de Gromov équivariante*.

Cette topologie n'est en général pas séparée: par exemple, si une suite  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X$ , alors elle converge aussi vers tout sous-espace  $\Gamma$ -invariant de  $X$  (nous utiliserons ceci plus tard). Il est immédiat de vérifier que  $(X_\omega, d_\omega, \rho_\omega)$  est une limite de la suite  $(X_i, d_i, \rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$  suivant le filtre  $\omega$  pour cette topologie. Ainsi, toute suite d'actions qui ne bougent pas trop des points bases a une limite! L'essentiel du travail de convergence est ramené à trouver des points bases qui, quitte à renormaliser les distances, ne sont pas trop bougés par les éléments de  $\Gamma$ . Étudier les propriétés des limites obtenues est souvent la partie la plus importante du travail.

Voici des propriétés immédiates des ultralimites (voir [KaL, Prop. 3.6, 3.12]).

**PROPOSITION 6.** (1) *L'espace métrique  $X_\omega$  est complet.*

(2) *Si  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  est une application  $(\lambda_i, \epsilon_i)$ -quasi-isométrique (respectivement  $\lambda_i$ -lipschitzienne)<sup>6</sup>, si  $\lambda = \lim_\omega \lambda_i < \infty$ ,  $\epsilon = \lim_\omega \epsilon_i < \infty$  et  $\lim_\omega d(f_i(*_i), *_i) < \infty$ , alors l'application  $f_\omega = \lim_\omega f_i : X_\omega \rightarrow Y_\omega$  définie par  $[x_i] \mapsto [f_i(x_i)]$  est  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-isométrique, et donc isométrique si  $(\lambda, \epsilon) = (1, 0)$ , (respectivement  $\lambda$ -lipschitzienne).*

(3) *Si  $X_i$  est géodésique pour tout  $i$ , alors  $X_\omega$  aussi.*

(4) *Si  $X_i$  est géodésique  $\delta_i$ -hyperbolique pour tout  $i$ , si  $\delta = \lim_\omega \delta_i < \infty$  alors  $X_\omega$  est géodésique  $\delta$ -hyperbolique, et donc un arbre réel si  $\delta = 0$ .  $\square$*

Par exemple, si  $(X, d)$  est un espace métrique, si  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $]0, +\infty[$  tendant vers  $+\infty$  (dite *suite des scalaires*) et  $(*_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $X$  (dite *suite des points d'observation*), alors l'ultralimite

$$(X_\omega, d_\omega, *_\omega) = \lim_\omega (X_i = X, d_i = \frac{1}{\lambda_i} d, *_i)$$

( $\Gamma$  est ici le groupe trivial) est appelée un *cône asymptotique* de  $X$ .

<sup>6</sup>) Pour tous les  $\lambda \geq 1$  et  $\epsilon \geq 0$ , une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces métriques est  $\lambda$ -lipschitzienne si  $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$  pour tous les  $x, y \in X$ , et elle est  $(\lambda, \epsilon)$ -quasi-isométrique si  $\frac{1}{\lambda} d(x, y) - \epsilon \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \epsilon$  pour tous les  $x, y \in X$ .

Dyubina-Polterovich [DP] ont montré que tous les cônes asymptotiques de toutes les variétés riemanniennes complètes simplement connexes de dimension au moins 2 et à courbure sectionnelle au plus  $-1$  (donc ceux de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ ) sont isométriques à un même arbre réel. Une description de celui-ci est l'ensemble des applications  $f : [0, a_f[ \rightarrow [0, 1]$  où  $0 < a_f < +\infty$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f$  est localement constante à droite (c'est-à-dire pour tout  $t \in [0, a_f[$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $f|_{[t, t+\epsilon[}$  est constant), muni de la distance

$$d(f, g) = a_f + a_g - 2 \sup\{t \geq 0 : \forall s \in [0, t], f(s) = g(s)\}.$$

#### 4. LA COMPACTIFICATION DE MORGAN-SHALEN REVISITÉE

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini.

Nous allons décrire une compactification d'un espace  $\mathcal{X}$  de classes de représentations de  $\Gamma$  dans un groupe topologique  $G$ , due à Thurston [FLP] si  $\Gamma = \Gamma_g$ ,  $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$  et  $\mathcal{X}$  est l'espace de Teichmüller, due à Morgan-Shalen [MS1] si  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$  et  $\mathcal{X}$  est la variété des caractères de représentations de  $\Gamma$  dans  $G$ , en suivant l'approche métrique de Bestvina [Bes1] et [Pau1] (voir aussi [Pau4]), et la présentation optimale de Parreau [Par2].

Nous dirons qu'une action isométrique de  $\Gamma$  sur un espace métrique  $\mathrm{CAT}(-1)$  est *complètement réductible* si pour tout  $\xi \in \partial_\infty X$  fixé par  $\Gamma$ , il existe  $\eta \in \partial_\infty X - \{\xi\}$  fixé par  $\Gamma$ . Cette définition est due à Serre [Ser] et Parreau [Par1], et nous renvoyons à cette dernière référence pour la bonne notion dans les espaces métriques  $\mathrm{CAT}(0)$ .

Soient  $X$  un espace métrique  $\mathrm{CAT}(-1)$  propre (par exemple le modèle du demi-espace supérieur de l'espace hyperbolique réel  $X = \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ ) et  $G$  un groupe topologique localement compact agissant (à gauche) sur  $X$  par isométries, proprement, avec quotient  $G \backslash X$  compact (par exemple  $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  agissant sur  $X = \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  par l'extension de Poincaré des homographies de  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\} = \partial_\infty \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , voir le début de la partie 5). Tout morphisme de groupes  $\rho$  de  $\Gamma$  dans  $G$  définit une action isométrique de  $\Gamma$  dans  $X$ , et nous noterons  $\ell_\rho$  sa fonction distance de translation sur  $X$ . Notons

- $\mathbf{P}^\Gamma$  l'ensemble quotient de l'ensemble  $[0, +\infty[^\Gamma - \{0\}$  des fonctions non nulles de  $\Gamma$  dans  $[0, +\infty[$ , par l'action de  $\mathbf{R}_+^*$  définie par  $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ , muni de la topologie quotient de la topologie produit (qui est métrisable car  $\Gamma$  est dénombrable mais pas localement compact si  $\Gamma$  est infini);
- $\mathcal{A}(\Gamma)$  l'ensemble des classes d'isométrie équivariante des actions isométriques, sans point fixe global, complètement réductibles, minimales de  $\Gamma$  sur les arbres réels  $T$ , muni de la topologie de Gromov équivariante;

- $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  l'ensemble quotient de l'ensemble des morphismes de groupes  $\rho : \Gamma \rightarrow G$  complètement réductibles, modulo l'action par conjugaison<sup>7)</sup> de  $G$ , muni de la topologie quotient de la topologie de la convergence simple. L'ensemble  $\mathcal{X}(\Gamma, \text{Isom}(X))$  des classes d'isométrie équivariante des actions isométriques de  $\Gamma$  sur  $X$  peut aussi être muni de la topologie de Gromov équivariante, et nous le noterons alors  $\mathcal{X}'(\Gamma, \text{Isom}(X))$ .

- $\theta_{MS} : \mathcal{X}(\Gamma, G) \rightarrow \mathbf{P}^\Gamma$  et  $\theta'_{MS} : \mathcal{X}'(\Gamma, \text{Isom}(X)) \rightarrow \mathbf{P}^\Gamma$  les applications définies par  $[\rho] \mapsto [\ell_\rho + 1]$ , et  $\theta_{CM} : \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{P}^\Gamma$  l'application  $T \mapsto [\ell_T]$ .

Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & [\ell_\rho + 1] \in \mathbf{P}^\Gamma \ni [\ell_T] & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \nwarrow & \\
 [\rho] \in \mathcal{X}(\Gamma, G) & \xrightarrow{\theta_{MS}} & \mathcal{X}'(\Gamma, \text{Isom}(X)) & \xrightarrow{\theta_{CM}} & \mathcal{A}(\Gamma) \ni T
 \end{array}$$

Notons  $\text{Out}(\Gamma) = \text{Aut}(\Gamma)/\text{Int}(\Gamma)$  le groupe des automorphismes extérieurs de  $\Gamma$  (c'est-à-dire le groupe quotient du groupe des automorphismes de groupes de  $\Gamma$  par son sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs  $h \mapsto \gamma h \gamma^{-1}$  pour  $\gamma \in \Gamma$ ). Il agit par homéomorphismes sur les espaces  $\mathbf{P}^\Gamma$ ,  $\mathcal{A}(\Gamma)$ ,  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  et  $\mathcal{X}'(\Gamma, \text{Isom}(X))$ , par passage au quotient de la précomposition par un automorphisme d'une fonction de  $\Gamma$  dans un ensemble.

**PROPOSITION 7.** *Les applications du diagramme précédent sont continues et  $\text{Out}(\Gamma)$ -équivariantes.*

*Démonstration.* Il est immédiat par les propriétés de la topologie quotient que l'application de  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  dans  $\mathcal{X}'(\Gamma, \text{Isom}(X))$  définie par l'action isométrique de  $G$  sur  $X$  est continue. Il est immédiat que l'application identité de  $\mathcal{X}'(\Gamma, \text{Isom}(X))$  dans  $\mathcal{X}'(\Gamma, \text{Isom}(X))$  est continue (il suffit de prendre  $K' = K$  et  $\mathcal{R}$  le graphe de  $\text{id}_K$  dans la définition de la topologie de Gromov équivariante). Par commutativité du diagramme ci-dessus, il suffit donc de montrer que la fonction distance de translation dépend continuellement de l'action pour la topologie de Gromov équivariante sur les arbres réels ou les espaces  $\text{CAT}(-1)$  propres.

Soit  $\gamma \in \Gamma$  et soit  $X'$  assez proche de  $X$  pour la topologie de Gromov équivariante. Notons  $\ell(\gamma)$  et  $\ell'(\gamma)$  les distances de translation de  $\gamma$  dans  $X$  et  $X'$  respectivement. Par définition de la topologie produit sur  $[0, +\infty[^\Gamma$ ,

<sup>7)</sup> Tout groupe  $H$  agit sur l'ensemble  $\text{Hom}(\Gamma, H)$  des morphismes de groupes de  $\Gamma$  dans  $H$  par  $(h, \rho) \mapsto \{h' \mapsto h\rho(h')h^{-1}\}$ .

il suffit de montrer que  $\ell(\gamma)$  et  $\ell'(\gamma)$  sont proches. S'il existe  $x \in X$  tel que  $d(x, \gamma x)$  est petite, alors il existe  $x' \in X'$  tel que  $d(x', \gamma x')$  est petite, donc nous pouvons supposer que  $\ell(\gamma) > 0$ . Comme  $X$  est CAT(-1) propre ou un arbre réel, ceci implique que  $\gamma$  est hyperbolique dans  $X$ . Soit  $\epsilon > 0$  petit devant  $\ell(\gamma)$ . Soit  $x$  un point de l'axe de translation de  $\gamma$  dans  $X$ . Il vérifie  $d(x, \gamma x) + d(\gamma x, \gamma^2 x) - d(x, \gamma^2 x) = 0$ . Si  $X'$  est assez proche de  $X$ , il existe  $x'$  dans  $X'$  tel que  $|d(x', \gamma x') - d(x, \gamma x)| < \epsilon$  et  $d(x', \gamma x') + d(\gamma x', \gamma^2 x') - d(x', \gamma^2 x') < \epsilon$ . Comme  $X'$  est CAT(-1) propre ou un arbre réel, ceci montre que  $\gamma$  est aussi hyperbolique dans  $X'$ , et que  $x'$  est à distance au plus  $\epsilon'$  (qui tend vers 0 quand  $\epsilon \rightarrow 0$ ) de l'axe de translation de  $\gamma$  dans  $X'$ . D'où, si  $y'$  est la projection orthogonale de  $x'$  sur cet axe,  $|\ell'(\gamma) - \ell(\gamma)| = |d(y', \gamma y') - d(x, \gamma x)| \leq |d(x', \gamma x') - d(x, \gamma x)| + 2\epsilon' \leq \epsilon + 2\epsilon'$ , ce qui montre le résultat.  $\square$

Cet argument montre que les axes de translation sont des limites d'axes de translation : si  $(X_\omega, d_\omega, *_\omega, \rho_\omega)$  est l'ultralimite d'une suite  $(X_i, d_i, *_i, \rho_i)_{i \in \mathbf{N}}$  avec  $X_i$  un arbre réel ou un espace CAT(-1) propre, si  $f_\omega : \mathbf{R} \rightarrow X_\omega$  est un paramétrage isométrique de l'axe de translation de  $\gamma \in \Gamma$  dans  $X_\omega$ , alors il existe  $I \in \omega$  tel que pour tout  $i \in I$ , l'élément  $\gamma$  est hyperbolique dans  $X_i$  et il existe un paramétrage isométrique  $f_i : \mathbf{R} \rightarrow X_i$  de l'axe de translation de  $\gamma$  dans  $X_i$  tel que  $f_\omega = \lim_\omega f_i$ .

Faisons quelques remarques sur les objets du diagramme précédent.

REMARQUE 8. Notons  $\mathcal{PA}(\Gamma)$  l'espace topologique quotient de  $\mathcal{A}(\Gamma)$  par l'action de  $\mathbf{R}_+^*$  par multiplication de la distance par un scalaire, c'est-à-dire l'espace des classes d'homothétie<sup>8)</sup> équivariante des actions isométriques, sans point fixe global, complètement réductibles, minimales de  $\Gamma$  sur les arbres réels  $T$ , muni de la topologie quotient de la topologie de Gromov équivariante. Il résulte de résultats de Culler-Morgan [CM] et [Pau2] (dont la propriété de continuité ci-dessus) que l'application  $\theta_{CM}$  induit par passage au quotient un homéomorphisme de  $\mathcal{PA}(\Gamma)$  sur son image dans  $\mathbf{P}^\Gamma$ .

REMARQUE 9. Parreau [Par1] a montré que si  $X$  est un espace symétrique alors  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  est le plus gros quotient séparé de l'espace topologique quotient  $\text{Hom}(\Gamma, G)/G$  (toujours pour l'action par conjugaison de  $G$  sur l'ensemble  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  muni de la topologie de la convergence simple), au sens suivant.

<sup>8)</sup> Une *homothétie* entre deux espaces métriques  $X$  et  $Y$  est une bijection  $f : X \rightarrow Y$  telle qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$  pour tous les  $x, y$  dans  $X$ .

- Pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ , il existe un élément  $\rho_{\text{ss}}$  dans l'adhérence  $\overline{G \cdot \rho}$  de l'orbite de  $\rho$  par  $G$  qui est complètement réductible.
- Pour tous les  $\rho, \rho' \in \text{Hom}(\Gamma, G)$  complètement réductibles, nous avons  $\overline{G \cdot \rho} \cap \overline{G \cdot \rho'} \neq \emptyset$  si et seulement si  $G \cdot \rho = G \cdot \rho'$ . Ainsi nous avons une application bien définie et surjective  $\pi : \text{Hom}(\Gamma, G)/G \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma, G)$  qui à  $[\rho]$  associe  $[\rho_{\text{ss}}]$ .
- L'application  $\pi$  est continue et la topologie induite sur  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  par l'inclusion de  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  dans  $\text{Hom}(\Gamma, G)/G$  coïncide avec la topologie la plus fine rendant continue  $\pi$ .
- L'espace  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  est séparé (donc localement compact) et toute application continue  $G$ -invariante de  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  dans un espace topologique séparé factorise par  $\pi$ .

Ces énoncés font sens sous les seules hypothèses que nous demandons sur  $(X, G)$ , et il est donc naturel de se demander pour quelles conditions sur  $(X, G)$  ils sont vérifiés, en particulier lorsque  $X$  est un immeuble hyperbolique (voir par exemple [GP]) ou un arbre régulier, qui ont souvent de jolis sous-groupes fermés  $G$  d'automorphismes. Comme remarqué par Parreau [Par2], le problème est beaucoup plus délicat pour les espaces  $\text{CAT}(0)$  propres : par exemple, l'espace topologique  $\mathcal{X}(\mathbf{Z}, \text{Isom}(\mathbf{R}^2))$  n'est pas séparé.

**REMARQUE 10.** Un lien entre l'espace topologique  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  et les quotients algébro-géométriques à la Mumford (dont les variétés des caractères de Culler-Shalen et Morgan-Shalen), est le suivant, voir [Lun, RS, Bre, Par2]. Par *variété algébrique affine*  $V$  définie sur un sous-corps  $k$  de  $\mathbf{C}$ , nous entendons dans ces notes un sous-ensemble d'un  $\mathbf{C}^N$  où  $N \in \mathbf{N}$ , lieu des zéros communs d'une famille de polynômes à  $N$  variables complexes à coefficients dans  $k$  (voir par exemple [Per, § 1]). L'ensemble de ses  $k$ -points est l'ensemble  $V(k)$  des zéros communs dans  $k^N$  de ces polynômes. Son anneau des fonctions est le quotient de l'anneau des polynômes par l'idéal des polynômes qui s'annulent sur  $V$ . Un *fermé de Zariski* de  $V$  est le lieu dans  $V$  des zéros communs d'une famille de polynômes complexes de  $\mathbf{C}^N$ .

Soit  $\underline{G}$  un groupe algébrique affine connexe réductif défini sur  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$  (voir par exemple [Bor]). Soient  $G = \underline{G}(\mathbf{K})_0$  et  $X$  un espace symétrique de  $G$  (par exemple  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ,  $\underline{G} = \text{PGL}_2$ ,  $G = \text{PSL}_2(\mathbf{C})$  et  $X = \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ ). Si  $\underline{G}$  est un sous-groupe algébrique défini sur  $\mathbf{K}$  de  $\text{SL}_N(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^{N^2}$  et si  $S$  est une partie génératrice finie de  $\Gamma$ , par restriction à  $S$ , le sous-ensemble  $\text{Hom}(\Gamma, \underline{G})$  s'identifie à une variété algébrique affine définie sur  $\mathbf{K}$  contenue dans  $(\mathbf{C}^{N^2})^S$ . La théorie géométrique des invariants (voir par exemple [PV]) montre qu'il existe une variété algébrique affine complexe



$\text{Hom}(\Gamma, \underline{G})//\underline{G}$  définie sur  $\mathbf{K}$ , dont l'anneau des fonctions est l'anneau des fonctions de  $\text{Hom}(\Gamma, \underline{G})$  invariantes par  $\underline{G}$ . De plus, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\Gamma, G) &\longrightarrow \text{Hom}(\Gamma, \underline{G})//\underline{G} \\ = \left\{ \begin{array}{l} G\text{-orbites fermées} \\ \text{dans } \text{Hom}(\Gamma, G) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \underline{G}\text{-orbites Zariski-fermées} \\ \text{dans } \text{Hom}(\Gamma, \underline{G}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

définie par  $G \cdot \rho \mapsto \underline{G} \cdot \rho$ , est

- un homéomorphisme, si  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$  (car sur  $\mathbf{C}$ , les orbites d'actions algébriques de groupes algébriques sur des variétés algébriques affines sont Zariski-fermées si et seulement si elles sont fermées, voir [Bre, Prop. 5.3]);
- une application continue, à fibres finies, d'image contenue (en général strictement) dans l'ensemble des points réels de  $\text{Hom}(\Gamma, \underline{G})//\underline{G}$ , si  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ .

Précisons ce que nous entendons par compactification dans ces notes. Soit  $X$  un espace topologique localement compact. Une *compactification* de  $X$  est un couple  $(\widehat{X}, \iota)$  où

- $\widehat{X}$  est un espace topologique compact;
- $\iota : X \rightarrow \widehat{X}$  est un homéomorphisme sur son image, ouverte et dense.

Nous identifions  $X$  avec son image dans  $\widehat{X}$  par  $\iota$ . Si  $X$  est muni d'une action continue d'un groupe topologique  $G$  et si cette action s'étend continuellement à  $\widehat{X}$ , nous dirons que cette compactification est *G-équivariante*. Deux compactifications (équivariantes)  $\widehat{X}$  et  $\widehat{X}'$  sont *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme (équivariant) de  $\widehat{X}$  dans  $\widehat{X}'$  valant l'identité sur  $X$ .

Par exemple, toute application continue  $\theta : X \rightarrow Y$  à valeurs dans un espace topologique  $Y$ , dont l'image est d'adhérence compacte, définit une compactification  $\widehat{X}^\theta$  de  $X$ , dite *associée à  $\theta$* , en lui rajoutant la frontière de l'image de  $\theta$ , de la manière suivante. Notons  $\widehat{X}^{\text{Ale}} = X \cup \{\infty\}$  la compactification d'Alexandrov de  $X$ . Alors l'application  $\iota$  de  $X$  dans  $\widehat{X}^{\text{Ale}} \times Y$ , qui envoie  $x \in X$  sur  $(x, \theta(x)) \in \widehat{X}^{\text{Ale}} \times Y$ , est un homéomorphisme sur son image, dont l'image est d'adhérence  $\widehat{X}^\theta$  compacte. Si  $X$  et  $Y$  sont munis d'une action continue d'un groupe topologique  $G$ , et si  $\theta$  est  $G$ -équivariante, alors cette compactification est  $G$ -équivariante.

Le résultat suivant est une variante très légère des résultats susmentionnés de Thurston, Morgan-Shalen, Bestvina, l'auteur de ce survol et Parreau. Par exemple, un cas nouveau auquel il s'applique est lorsque  $X$  est un immeuble hyperbolique localement fini dont le groupe des automorphismes isométriques  $G$  est transitif sur les chambres (voir par exemple [Bourd, GP, HP]).

THÉORÈME 11. Soient  $\Gamma$  un groupe de type fini,  $X$  un espace  $\text{CAT}(-1)$  propre et  $G$  un groupe localement compact agissant sur  $X$  par isométries, proprement, avec quotient  $G \backslash X$  compact. Alors l'adhérence de l'image de  $\theta_{MS}$  est compacte et sa frontière est contenue dans la réunion de  $\theta_{CM}(\mathcal{A}(\Gamma))$  et de  $\{[|\chi| + 1] : \chi \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{R}) - \{0\}\}$ .

*Démonstration.* Soit  $S$  une partie génératrice finie fixée de  $\Gamma$ . Pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ , appelons *facteur de dilatation* de  $\rho$  l'élément de  $[0, +\infty[$  défini par

$$\lambda_\rho = \inf_{x \in X} \max_{s \in S} d(x, \rho(s)x),$$

et borne inférieure 1-approchée de  $\lambda_\rho$  tout point  $*_\rho$  de  $X$  tel que

$$\max_{s \in S} d(*_\rho, \rho(s)*_\rho) \leq \lambda_\rho + 1.$$

Notons que pour tout  $h \in G$ , nous avons  $\lambda_{h\rho h^{-1}} = \lambda_\rho$ ; de plus,  $h*_\rho$  est une borne inférieure 1-approchée de  $\lambda_{h\rho h^{-1}}$ .

Pour montrer le théorème 11, puisque  $\mathbf{P}^\Gamma$  est métrisable, il suffit de montrer que toute suite  $([\rho_i])_{i \in \mathbf{N}}$  dans  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  admet une sous-suite dont l'image par  $\theta_{MS}$  converge vers  $[\ell_\rho + 1]$  pour un  $[\rho]$  dans  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  ou vers  $[|\chi| + 1]$  pour un  $\chi$  dans  $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{R})$  ou vers  $[\ell_T]$  pour un  $T$  dans  $\mathcal{A}(\Gamma)$ .

Supposons tout d'abord que la suite  $(\lambda_{\rho_i})_{i \in \mathbf{N}}$  est bornée. Alors puisque l'action de  $G$  est cocompacte, quitte à conjuguer  $\rho_i$  dans  $G$ , nous pouvons supposer que la suite  $(*_i)_{i \in \mathbf{N}}$  reste dans un compact de  $X$ . Puisque l'action de  $G$  sur  $X$  est propre et par extraction diagonale, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , la suite  $(\rho_i(\gamma))_{i \in \mathbf{N}}$  dans  $G$  converge vers un élément  $\rho(\gamma)$  de  $G$ . Par continuité de  $\theta_{MS}$ , nous avons donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} [\ell_{\rho_i} + 1] = [\ell_\rho + 1] \in \theta_{MS}(\mathcal{X}(\Gamma, G)),$$

si  $\rho(\Gamma)$  ne fixe pas de point à l'infini de  $X$  (donc  $\rho$  est complètement réductible) ou si  $\ell_\rho = 0$  (la représentation triviale est complètement réductible, de fonction distance de translation nulle). Sinon, soit  $\xi \in \partial_\infty X$  fixé par  $\rho(\Gamma)$ .

Rappelons (voir [BH, p. 268]) que la *fonction de Busemann* en  $\xi$  est

$$\beta_\xi : (x, y) \mapsto \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, c(t)) - d(y, c(t))$$

où  $c : [0, +\infty[ \rightarrow X$  est n'importe quel rayon géodésique de point à l'infini  $\xi$ . Elle est bien définie et vérifie les propriétés de cocycle et d'invariance

$$\beta_\xi(x, y) + \beta_\xi(y, z) = \beta_\xi(x, z), \quad \beta_{\alpha\xi}(\alpha x, \alpha y) = \beta_\xi(y, x)$$

pour tous les  $x, y, z \in X$  et pour toute isométrie  $\alpha$  de  $X$ . L'horosphère centrée en  $\xi$  passant par  $x \in X$  est  $\{y \in X : \beta_\xi(x, y) = 0\}$ .

Pour tout  $x_0 \in X$ , l'application  $\chi : \gamma \mapsto \beta_\xi(x_0, \rho(\gamma)x_0)$  est donc un élément non nul de  $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{R})$  tel que  $\ell_\rho = |\chi|$ . D'où

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} [\ell_{\rho_i} + 1] = [\ell_\rho + 1] = [|\chi| + 1].$$

Supposons maintenant, quitte à extraire, que la suite  $(\lambda_{\rho_i})_{i \in \mathbf{N}}$  est strictement positive et converge vers  $+\infty$ . Pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , si  $\|\gamma\| = \|\gamma\|_S$  est la longueur minimale d'un mot en  $S \cup S^{-1}$  représentant  $\gamma$ , nous avons, par l'inégalité triangulaire,

$$(1) \quad d(*_{\rho_i}, \rho_i(\gamma)*_{\rho_i}) \leq \|\gamma\| \max_{s \in S} d(*_{\rho_i}, \rho_i(s)*_{\rho_i}) \leq \|\gamma\| (\lambda_{\rho_i} + 1).$$

Fixons un ultrafiltre non principal  $\omega$  sur  $\mathbf{N}$ . Considérons l'ultralimite

$$(X_\omega, d_\omega, *_\omega, \rho_\omega) = \lim_\omega (X_i = X, d_i = \frac{1}{\lambda_i} d, *_i, \rho_i)$$

pour la suite de scalaires  $(\lambda_i = \lambda_{\rho_i})_{i \in \mathbf{N}}$  tendant vers  $+\infty$  et la suite de points d'observation  $(*_i = *_i)_{i \in \mathbf{N}}$  (qui sont envoyés à distance uniformément bornée par tout élément fixé de  $\Gamma$ , pour la distance renormalisée, d'après l'inégalité (1)). Remarquons que la distance de translation de  $\rho_i$  sur l'espace métrique renormalisé  $(X_i, d_i)$  est  $\frac{1}{\lambda_{\rho_i}} \ell_{\rho_i}$ .

Par la proposition 6 (4), l'espace métrique  $(X_\omega, d_\omega)$  est un arbre réel, et l'action  $\rho_\omega$  n'a pas de point fixe global, parce que la renormalisation de la métrique fait que tout point de  $X_i$  est déplacé d'une distance au moins 1 par au moins un des éléments de la partie génératrice  $S$ .

Nous pouvons donc considérer l'unique sous-arbre invariant minimal  $T$  de  $X_\omega$ , et sa fonction distance de translation  $\ell_T = \ell_{X_\omega}$ .

Par le fait que les ultralimites sont des limites pour la topologie de Gromov équivariante, par la continuité de la fonction distance de translation pour cette topologie (voir la démonstration de la proposition 7), nous avons

$$\lim_\omega \theta_{MS}([\rho_i]) = \lim_\omega [\ell_{\rho_i} + 1] = \lim_\omega \left[ \frac{1}{\lambda_{\rho_i}} (\ell_{\rho_i} + 1) \right] = [\ell_{X_\omega}] = [\ell_T].$$

Ainsi si  $T$  n'a pas de point fixe global à l'infini, alors l'action de  $\Gamma$  sur  $T$  est complètement réductible, et  $\lim_\omega \theta_{MS}([\rho_i]) \in \theta_{CM}(\mathcal{A}(\Gamma))$ , ce qui montre le résultat par la proposition 5 (2) (car toute valeur d'adhérence d'une suite dans un espace métrisable est limite d'une sous-suite). Si  $T$  admet un point fixe global à l'infini, l'argument ci-dessus sur les fonctions de Busemann montre que  $\ell_T$  est égale à la fonction distance de translation d'une action

isométrique (par translations) sans point fixe global de  $\Gamma$  sur l'arbre réel  $\mathbf{R}$  (donc complètement réductible et minimale). Par conséquent, la limite  $\lim_{\omega} \theta_{MS}([\rho_i])$  appartient aussi à  $\theta_{CM}(\mathcal{A}(\Gamma))$ , ce qui conclut.  $\square$

REMARQUES. (1) Lorsque  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  est localement compact, la compactification de l'espace  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$  associée à l'application  $\text{Out}(\Gamma)$ -équivariante continue  $\theta_{MS}$  d'image relativement compacte, est une compactification  $\text{Out}(\Gamma)$ -équivariante de  $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ , que nous noterons  $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma, G)$  dans la suite.

(2) Nous dirons que l'action de  $G$  sur  $X$  est  $\Gamma$ -semi-simplifiable si pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$  dont l'action sur  $X$  fixe un point à l'infini  $\xi \in \partial_{\infty} X$ , il existe  $\eta \in \partial_{\infty} X - \{\xi\}$  et  $\rho' \in \text{Hom}(\Gamma, G)$  fixant  $\xi$  et  $\eta$  tel que  $\ell_{\rho'} = \ell_{\rho}$ .

C'est par exemple le cas

- si  $X$  est un espace symétrique et  $G = \text{Isom}(X)$  ou  $G = \text{Isom}(X)_0$  est la composante neutre de son groupe des isométries,
- ou si  $G$  n'a pas d'isométrie parabolique, comme pour le groupe des automorphismes isométriques d'un immeuble hyperbolique localement fini.

Si l'action de  $G$  sur  $X$  est  $\Gamma$ -semi-simplifiable, la démonstration ci-dessus montre que la frontière de  $\theta_{MS}(\mathcal{X}(\Gamma, G))$  est contenue dans  $\theta_{CM}(\mathcal{A}(\Gamma))$ , et que le bord  $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma, G) - \mathcal{X}(\Gamma, G)$  de la compactification  $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma, G)$  est homéomorphe (de manière  $\text{Out}(\Gamma)$ -équivariante) à un sous-espace compact de  $\mathcal{PA}(\Gamma)$ , par la remarque 8.

(3) Lorsque  $G = \text{SL}_2(\mathbf{C})$  (respectivement  $G = \text{PSL}_2(\mathbf{C})$ ) agissant non fidèlement (respectivement fidèlement) sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , la compactification  $\text{Out}(\Gamma)$ -équivariante  $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma, G)$  est isomorphe à la compactification  $\text{Out}(\Gamma)$ -équivariante de Morgan-Shalen de la variété des caractères  $(\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2) // \text{SL}_2)(\mathbf{C})$  (respectivement  $(\text{Hom}(\Gamma, \text{PGL}_2) // \text{PGL}_2)(\mathbf{C})$ ), par définition de celle-ci, que nous ne rappelons pas ici (voir [MS1]) et par la remarque 10.

## 5. LES SURFACES D'EPSTEIN-SCHWARZ-DUMAS

Décrivons maintenant l'outil principal de l'article [Dum2], qui développe un travail d'Epstein [Eps]. Notons

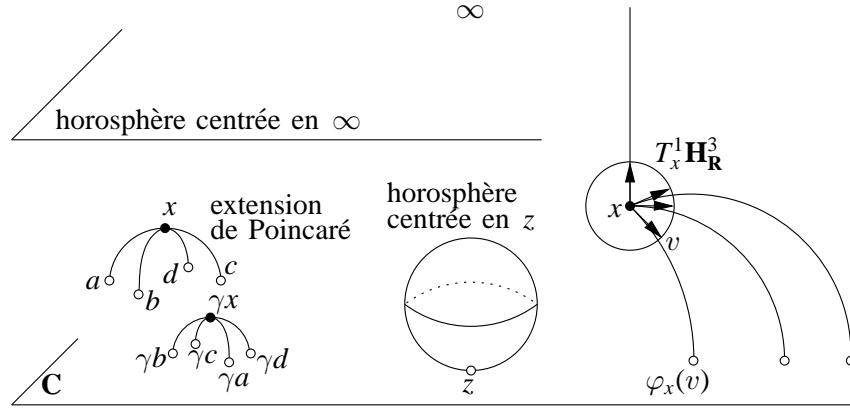
$$\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 = \left( \{(z, t) \in \mathbf{C} \times ]0, +\infty[ \}, \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2} \right)$$

le modèle du demi-espace supérieur de l'espace hyperbolique réel de dimension 3, dont le bord à l'infini est  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ . Le groupe

$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  agit continuellement et fidèlement sur la compactification géodésique  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 \cup \partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  (transitivement sur  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ ): l'élément  $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$  agit par l'homographie  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  sur  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  et par son extension de Poincaré

$$(2) \quad (z, t) \mapsto \left( \frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + t^2 a\bar{c}}{|cz+d|^2 + t^2 |c|^2}, \frac{t}{|cz+d|^2 + t^2 |c|^2} \right)$$

sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ . Les horosphères de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  centrées en  $\infty$  sont les plans horizontaux  $\mathbf{C} \times \{t\}$  où  $t > 0$ , et celles centrées en  $z \in \mathbf{C}$  sont les sphères euclidiennes contenues dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , tangentes à  $\mathbf{C}$  en  $z$  et privées de  $z$ .



Pour tout point  $x$  de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , notons  $T_x^1 \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  la sphère unité de l'espace tangent à  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  en  $x$ ,  $\varphi_x : T_x^1 \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 \rightarrow \partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  le difféomorphisme qui à un vecteur tangent unitaire  $v$  en  $x$  associe le point à l'infini du rayon géodésique de vecteur vitesse  $v$  en son origine  $x$  (voir le dessin ci-dessus à droite), et  $ds_x^2$  la métrique riemannienne sur  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  qui fait de  $\varphi_x$  une isométrie riemannienne.

Rappelons qu'une métrique riemannienne  $\sigma$  sur une surface de Riemann  $X$  est dite *conforme* si dans toute carte locale  $(U, \zeta)$  de  $X$ , elle s'écrit  $\sigma_{U, \zeta}(\zeta) |d\zeta|^2$  où  $\sigma_{U, \zeta} : U \rightarrow ]0, +\infty[$  est lisse. Comme nous le verrons dans la démonstration et dans la remarque 13, le résultat suivant construit des enveloppes lisses de familles d'horosphères de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  de hauteurs définies par des structures conformes sur des ouverts immergés dans  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ .

**PROPOSITION 12 (Epstein).** *Soient  $\Omega$  une surface de Riemann,  $\sigma$  une métrique riemannienne conforme sur  $\Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  une application holomorphe localement injective. Alors il existe une unique application lisse*

$\Theta = \Theta_{f, \sigma}$  de  $\Omega$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  telle que pour tout  $\zeta \in \Omega$ , nous avons

$$f^*(ds_{\Theta(\zeta)}^2)(\zeta) = \sigma(\zeta) |d\zeta|^2 .$$

*Démonstration.* En tout point  $\zeta_0 \in \Omega$ , nous pouvons supposer, quitte à faire agir une isométrie de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , que  $z_0 = f(\zeta_0)$  appartient à la carte affine  $\mathbf{C}$  de  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ . Sur un voisinage assez petit  $U$  de  $\zeta_0$ , l'application  $f$  est un difféomorphisme sur l'ouvert  $f(U)$ , et l'image par  $(f^{-1})^*$  de la métrique conforme  $\sigma|_U$  s'écrit  $e^{2\eta(z)}|dz|^2$  où  $\eta : z \mapsto \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{\sigma(f^{-1}(z))}{|f^{-1}(z)|^2}$  est lisse sur  $f(U)$ . Notons  $\mathcal{HS}_3$  l'espace des horosphères de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , identifié avec  $\partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 \times \mathbf{R}$  par le paramétrage de Hopf en  $x_0 \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  (voir l'appendice A). Soit  $h : f(U) \rightarrow \mathbf{R}$  l'application lisse telle que  $|dz|^2 = e^{2h(z)} ds_{x_0}^2$  en tout point  $z \in f(U)$ . Notons  $F^* : f(U) \rightarrow \mathcal{HS}_3$  l'application  $z \mapsto (z, \eta(z) + h(z))$ , et  $F : f(U) \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  l'application associée à  $F^*$  par le lemme 17. Alors  $\Theta : \zeta \mapsto F(f(\zeta))$  convient sur  $U$  par la formule (5). L'unicité découle de l'unicité dans ce lemme.

Voici une formule pour calculs ultérieurs. En notant  $\eta_z = \frac{\partial \eta}{\partial z}$  et  $\eta_{\bar{z}} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}}$ , on peut montrer que pour tout  $\zeta \in U$ , si  $z = f(\zeta)$ , alors

$$(3) \quad \Theta(\zeta) = \left( z + \frac{4 \eta_{\bar{z}}(z)}{e^{2\eta(z)} + 4 \eta_z(z) \eta_{\bar{z}}(z)}, \frac{2}{e^{\eta(z)} + 4 e^{-\eta(z)} \eta_z(z) \eta_{\bar{z}}(z)} \right)$$

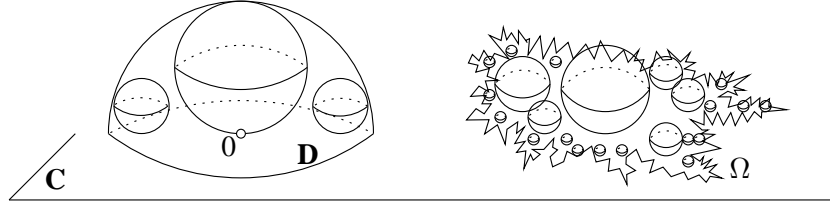
convient (voir [Dum2, §3.2] et la formule (2)).  $\square$

Par unicité, si  $\Gamma$  est un groupe d'automorphismes de  $\Omega$ , qui agit par isométries de la métrique conforme  $\sigma$ , si  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbf{C})$  est un morphisme de groupes tel que  $f \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ f$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , alors l'application  $\Theta$  est  $\rho$ -équivariante.

REMARQUE 13. Si  $\Omega$  est une surface et si  $(H_{\zeta})_{\zeta \in \Omega}$  est une famille d'horosphères de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  paramétrée par  $\Omega$ , une *enveloppe* de cette famille est une application continue  $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  telle que pour tout  $\zeta \in \Omega$ , nous avons  $\Theta(\zeta) \in H_{\zeta}$ . On peut demander aussi que  $\Theta$  soit de classe  $C^1$  et  $T_{\zeta}\Theta(T_{\zeta}\Omega) \subset T_{\Theta(\zeta)}H_{\zeta}$  (sans demander que  $\Theta$  soit une immersion), mais nous ne le ferons pas ici. Par l'appendice A, l'application  $\Theta$  est une enveloppe de la famille des horosphères  $\{x \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3 : f^*(ds_x^2)(\zeta) = \sigma(\zeta) |d\zeta|^2\}$  paramétrée par  $\zeta \in \Omega$ . Il est fort utile pour les calculs que cette application soit lisse (même si ce n'est pas toujours une immersion), ce qui n'est pas si fréquent pour des enveloppes.

EXEMPLE. Si  $\Omega$  est un domaine de Jordan de  $\mathbf{C}$ , si  $\sigma$  est sa métrique de Poincaré et si  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  est l'inclusion, alors l'application  $\Theta = \Theta_{f, \sigma}$

donne une jolie surface dans l'espace hyperbolique. Si  $\Omega$  est le disque ouvert unité  $\mathbf{D}$  de  $\mathbf{C}$ , en regardant la valeur de  $\Theta$  en 0 et en utilisant l'invariance par le groupe des automorphismes de  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  préservant  $\mathbf{D}$ , l'image de  $\Theta$  est le plan hyperbolique de bord à l'infini le cercle unité.



REMARQUE. Si  $\Omega$  est un domaine de Jordan de  $\mathbf{C}$ , il existait déjà plusieurs manières de faire border à  $\partial\Omega$  une surface contenue dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , par exemple par des surfaces minimales, des applications harmoniques, et surtout par la composante connexe  $\partial_+\mathcal{C}\partial\Omega$  du bord de l'enveloppe convexe  $\mathcal{C}\partial\Omega$  de  $\partial\Omega$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ , sur laquelle se rétracte  $\Omega$ , par la projection le long du rayon géodésique partant perpendiculairement à un hyperplan d'appui en un point du bord  $\mathcal{C}\partial\Omega$  et arrivant en un point de  $\Omega$ , voir par exemple [MT, §3.1]. Cette surface  $\partial_+\mathcal{C}\partial\Omega$  est une enveloppe de la famille de ses hyperplans d'appuis, et aussi une enveloppe d'une famille d'horosphères : pour tout  $\zeta \in \Omega$ , notons  $H_\zeta$  la plus petite horosphère centrée en  $\zeta$  rencontrant l'enveloppe convexe  $\mathcal{C}\partial\Omega$ . Alors  $\partial_+\mathcal{C}\partial\Omega$  est une enveloppe (au sens restreint ci-dessus) de la famille d'horosphères  $(H_\zeta)_{\zeta \in \Omega}$ . Mais cette projection de  $\Omega$  sur  $\partial_+\mathcal{C}\partial\Omega$  n'est pas lisse, son image est une surface plissée, fort utile par ailleurs pour l'étude des groupes kleinien, comme nous l'a enseigné Thurston, voir [MT, §6]. La lissité des applications  $\Theta_{f,\sigma}$  est son gros avantage, avec le fait que des calculs de ses invariants riemanniens sont raisonnables par la formule (3).

Soient  $X$  une structure de surface de Riemann sur  $\Sigma_g$  et  $\tilde{X}$  celle relevée sur  $\tilde{\Sigma}_g$ . Soient  $\phi \in \mathcal{Q}(X)$  et  $\tilde{\phi} = \pi^*\phi \in \mathcal{Q}(\tilde{X})$ . Soit  $D_\phi$  une application développante, de représentation d'holonomie  $\rho_\phi$ , de la structure projective complexe définie par  $\phi$  (l'immersion holomorphe  $D_\phi : \tilde{X} \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  est solution de l'équation différentielle schwarzienne  $Sf = \phi$ ). Remarquons que  $|\tilde{\phi}|$  est une métrique conforme sur la surface de Riemann  $\Omega = \tilde{X} - \tilde{\phi}^{-1}(0)$ , puisqu'elle s'écrit en carte locale  $|\tilde{\phi}(z)| |dz|^2$  avec  $|\tilde{\phi}(z)| > 0$  en dehors des zéros de  $\tilde{\phi}$ . Si  $f = D_\phi|_\Omega$  et  $\sigma = 2|\tilde{\phi}|_\Omega$ , l'application  $\Theta_\phi = \Theta_{f,\sigma}$  sera appelée *l'application de Epstein-Schwarz-Dumas* de  $\phi$ .

6. DÉGÉNÉRESCENCES DE STRUCTURES PROJECTIVES COMPLEXES, D'APRÈS  
D. DUMAS

Fixons une structure de surface de Riemann  $X$  sur  $\Sigma_g$ , et notons  $\tilde{X}$  la structure de surface de Riemann sur  $\tilde{\Sigma}_g$  relevée. Notons  $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ . Le résultat suivant est une compilation de résultats de Poincaré, Hejhal [Hej] et Gallo-Kapovich-Marden [GKM].

THÉORÈME 14. *L'application  $\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{X}} : \mathbf{CP}_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma_g, G)$  qui envoie  $[D, \rho]$  sur  $[\rho]$  est un homéomorphisme local tel que*

(1) *son image est l'ensemble des  $G$ -orbites des  $\phi \in \mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$  non élémentaires<sup>9</sup>) qui se relèvent en une représentation de  $\Gamma_g$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$  par la projection canonique  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ ;*

(2) *sa restriction à toute fibre de  $\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{T}} : \mathbf{CP}_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma_g)$  est une application injective continue propre.  $\square$*

Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 & [D, \rho] & \longmapsto & [SD \bmod \Gamma_g] & \\
 [D, \rho] \in \mathbf{CP}_1(\Sigma_g) & \xrightarrow[\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{Q}}]{\cong} & \mathcal{Q}(\Sigma_g) & \xleftarrow{\supset} & \mathcal{Q}(X) \\
 \downarrow & \downarrow \theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{X}} & & \swarrow \theta_{\mathcal{Q}/\mathcal{X}} & \swarrow \phi \\
 [\rho] \in \mathcal{X}(\Gamma, G) & & [\rho_\phi] & & \\
 & \cap & & & \\
 & \hat{\mathcal{X}}(\Gamma, G) & & & 
 \end{array}$$

Le but de cette partie est d'étudier la compactification  $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ -équivariante de l'espace  $\mathbf{CP}_1(\Sigma_g)$  associée à l'application  $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ -équivariante continue  $\theta_{\mathbf{CP}_1/\mathcal{X}} : \mathbf{CP}_1(\Sigma_g) \rightarrow \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_g, G)$  qui envoie  $[D, \rho]$  sur  $[\rho] \in \mathcal{X}(\Gamma_g, G)$ . Elle induit une compactification de  $\mathcal{Q}(X)$ , qui est la compactification  $\hat{\mathcal{Q}}^{\mathrm{hol}}(X)$  de  $\mathcal{Q}(X)$  associée à l'application continue  $\theta_{\mathcal{Q}/\mathcal{X}} : \mathcal{Q}(X) \rightarrow \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_g, G)$ , qui envoie  $\phi \in \mathcal{Q}(X)$  sur la classe dans  $\mathcal{X}(\Gamma_g, G)$  d'une représentation d'holonomie  $\rho_\phi$  d'une structure projective complexe intégrant  $\phi$ .

Notons  $\hat{\mathcal{Q}}^{\mathrm{ray}}(X)$  la compactification de  $\mathcal{Q}(X)$  par ses rayons vectoriels, dont le bord s'identifie à la sphère unité  $\mathcal{Q}^1(X)$  de l'espace vectoriel normé

<sup>9</sup>) Une représentation de  $\Gamma_g$  dans le groupe des isométries d'un espace  $\mathrm{CAT}(-1)$   $X$  est *élémentaire* si elle préserve un point ou une paire de points de  $X \cup \partial_\infty X$ . Notons qu'une représentation non élémentaire est en particulier complètement réductible.



$\mathcal{Q}(X)$ , qui n'est autre que la compactification associée à l'application continue  $\theta : \mathcal{Q}(X) \rightarrow \mathcal{Q}(X)$  définie par  $\phi \mapsto \arctan \|\phi\| \frac{\phi}{\|\phi\|}$  (qui vaut 0 en 0 et d'image la boule unité ouverte de  $\mathcal{Q}(X)$ , qui est relativement compacte). Un problème de Gallo-Kapovich-Marden, dont nous allons donner la réponse apportée par Dumas, est de comparer ces deux compactifications  $\widehat{\mathcal{Q}}^{\text{hol}}(X)$  et  $\widehat{\mathcal{Q}}^{\text{ray}}(X)$ .

Ce problème est à mettre en parallèle avec le fait de comparer le bord de Teichmüller (qui s'identifie avec  $\mathcal{Q}^1(X)$ ) de l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(\Sigma_g)$  pointé en  $[X]$  (paramétrable aussi par  $\mathcal{Q}(X)$ ), avec son bord de Thurston  $\mathcal{PMF}_g$ , qui est l'espace quotient de  $\mathcal{MF}_g$  par l'action de  $\mathbf{R}_+^*$  définie par  $\lambda(\mathcal{F}, \mu) = (\mathcal{F}, \lambda\mu)$ , et s'identifie avec le bord de la compactification de Morgan-Shalen définie par l'application  $\theta : \mathcal{T}(\Sigma_g) \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_g, G)$  qui à  $[Y]$  associe la classe dans  $\mathcal{X}(\Gamma_g, G)$  de la représentation d'holonomie d'une structure hyperbolique sur  $\Sigma_g$  conforme sur  $Y$  (voir [Pau5]). Ces deux compactifications coïncident sur une partie générique (les éléments de  $\mathcal{PMF}_g$  représentés par les feuilletages mesurés uniquement ergodiques), mais ne coïncident pas partout. Il est naturel de penser qu'il pourrait en être de même dans le cas que nous étudions.

Rappelons qu'à toute différentielle quadratique holomorphe  $\phi \in \mathcal{Q}(X)$  non nulle, dont nous noterons  $\tilde{\phi}$  le relevé au revêtement universel  $\tilde{\Sigma}_g$ , est associé

- la distance  $d_{\tilde{\phi}}$  sur  $\tilde{\Sigma}_g$ , qui fait de  $(\tilde{\Sigma}_g, d_{\tilde{\phi}})$  un espace métrique CAT(0) dont la courbure strictement négative est concentrée aux zéros de  $\tilde{\phi}$  (voir la partie 1.3);

- le feuilletage horizontal  $\mathcal{F}_{\tilde{\phi}} = \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\phi}}$  de  $\tilde{\phi}$  sur  $\tilde{\Sigma}_g$  (voir la partie 1.3), sa pseudo-distance transverse  $\delta_{\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\phi}}}$ , et l'arbre dual  $T_{\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\phi}}}$  obtenu en rendant séparée cette pseudo-distance (voir la partie 2);

- la norme  $\|\phi\|$  de  $\phi$ , c'est-à-dire l'aire totale de la surface plate à singularités coniques associée à  $\phi$  (voir la partie 1.3);

- la classe  $[\rho_{\phi}]$  d'une représentation d'holonomie  $\rho_{\phi} : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbf{C})$  d'une structure projective complexe intégrant  $\phi$  (voir la partie 1.4), dont le facteur de dilatation est  $\lambda_{\rho_{\phi}} = \inf_{x \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3} \max_{s \in S} d(x, \rho_{\phi}(s)x)$ , où  $S$  est une partie génératrice finie fixée de  $\Gamma_g$  (voir la partie 4).

- $\Theta_{\phi} : \tilde{X} - \tilde{\phi}^{-1}(0) \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  l'application d'Epstein-Schwarz-Dumas de  $\phi$ , qui est  $\Gamma_g$ -équivariante pour les actions de  $\Gamma_g$  sur  $\tilde{X} - \tilde{\phi}^{-1}(0)$  par automorphismes de revêtement et sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  par  $\rho_{\phi}$  (voir la partie 5).

Le cœur de l'article de Dumas [Dum2] est le résultat suivant. Sa démonstration repose sur un calcul de la première et la seconde forme fondamentale de l'application de Epstein-Schwarz-Dumas, pour lequel nous

renvoyons à [Dum2], à l'aide de la formule 3 (mais l'interprétation par dualité décrite dans l'appendice A, et l'article [Sch], pourraient donner une nouvelle approche à ces calculs). Pour tout  $\phi \in \mathcal{Q}(X)$ , notons  $\tilde{X}_{\phi,5}$  le complémentaire du 5-voisinage de  $\tilde{\phi}^{-1}(0)$  dans  $\tilde{X}$  pour la distance  $d_{\tilde{\phi}}$ . Une géodésique pour  $d_{\tilde{\phi}}$  est *non singulière* si elle ne passe pas par un zéro de  $\tilde{\phi}$ . Remarquons que si une géodésique  $c$  pour  $d_{\tilde{\phi}}$  est horizontale, alors sa mesure transverse totale  $|c|_{\mathcal{F}_\phi}$  pour le feuilletage horizontal est nulle.

**THÉORÈME 15 (Dumas).** *Soit  $X$  une structure complexe sur  $\Sigma_g$ .*

(i) *Pour tout  $\phi \in \mathcal{Q}(X)$ , l'application  $\Theta_\phi$  de  $(\tilde{X}_{\phi,5}, d_{\tilde{\phi}})$  dans  $(\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3, d_{\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3})$  est 2-lipschitzienne (voir [Dum2, Theo.3.6]).*

(ii) *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $\phi \in \mathcal{Q}(X)$ , pour tout segment géodésique  $c$  entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\tilde{X}$  pour  $d_{\tilde{\phi}}$ , si*

$$d_{\tilde{\phi}}(c, \tilde{\phi}^{-1}(0)) \geq A \left(1 + \sqrt{d_{\tilde{\phi}}(x, y)}\right)$$

(en particulier  $c$  est non singulier), alors (voir [Dum2, Theo. 3.6 (iii) et 3.9])

$$(1 - \epsilon) |c|_{\mathcal{F}_\phi} - \epsilon \leq d_{\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3}(\Theta_\phi(x), \Theta_\phi(y)) \leq (1 + \epsilon) |c|_{\mathcal{F}_\phi} + \epsilon. \quad \square$$

Le résultat suivant s'obtient alors assez facilement, et le point (3) est la clef de voûte de l'article [Dum2], comme annoncé dans l'introduction.

**COROLLAIRE 16 (Dumas).** *Soit  $(\phi_i)_{i \in \mathbf{N}}$  une suite dans  $\mathcal{Q}(X)$  telle que  $\|\phi_i\| \rightarrow +\infty$  et  $\frac{\phi_i}{\|\phi_i\|} \rightarrow \phi \in \mathcal{Q}(X)$ . Soit  $x_0 \in \tilde{X}$  un point d'un axe de translation non singulier non horizontal d'un élément  $\gamma_0 \in \Gamma_g$  pour la distance  $d_{\tilde{\phi}}$ .*

(1) *Il existe  $\kappa > 0$  tel que pour tout  $i \in \mathbf{N}$  assez grand, nous avons*

a)  $\frac{1}{\kappa} \lambda_{\rho_{\phi_i}} \leq \sqrt{\|\phi_i\|} \leq \kappa \lambda_{\rho_{\phi_i}},$

b) *il existe (au moins) un point  $*_i \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$  tel que  $d(*_i, \Theta_{\phi_i}(x_0)) \leq \kappa \sqrt{\|\phi_i\|}$ , qui est une borne inférieure 1-approchée de  $\lambda_{\rho_{\phi_i}}$ .*

(2) *Pour tout segment géodésique non singulier  $c$  pour  $d_{\tilde{\phi}}$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , pour tout  $i$  assez grand, l'application  $\Theta_{\phi_i} : (c, \delta_{\tilde{\mathcal{F}}_\phi}) \rightarrow (\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3, \frac{1}{\sqrt{\|\phi_i\|}} d_{\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3})$  est une  $(1 + \epsilon, \epsilon)$ -quasi-géodésique.*

(3) *Soit  $T \in \mathcal{A}(\Gamma_g)$  tel que  $\theta_{CM}(T)$  soit une valeur d'adhérence dans  $\mathbf{P}^{\Gamma_g}$  de la suite  $(\theta_{MS}([\rho_{\phi_i}]))_{i \in \mathbf{N}}$ . Alors à homothétie de  $T$  près, il existe un morphisme d'arbres réels  $\Gamma_g$ -équivariant de l'arbre dual  $T_{\tilde{\mathcal{F}}_\phi}$  dans  $T$ .*

Si les zéros de  $\phi$  sont simples (ce qui est le cas générique), alors ce morphisme d'arbres réels est une isométrie, car il est injectif sur les images

des géodésiques non singulières non horizontales par (2), et ne peut pas plier aux singularités, car deux points près d'un zéro simple peuvent être poussés le long de feuilles pour être joints par une géodésique non singulière verticale. Ainsi, la suite  $(\theta_{MS}([\rho_{\phi_i}]))_{i \in \mathbf{N}}$  converge vers la classe d'homothétie de la fonction distance de translation de l'arbre dual du feuilletage horizontal de  $\phi$ .

*Démonstration.* Les assertions (1) et (2) se déduisent assez facilement du théorème 15, voir [Dum2, Theo. 4.7, 4.4, 4.5]. Par exemple, (2) découle de (ii) appliqué à  $\phi_i$  en multipliant les inégalités par  $\frac{1}{\sqrt{\|\phi_i\|}}$ . Montrons (3).

Soit  $\omega$  un ultrafiltre non principal sur  $\mathbf{N}$  tel que  $\lim_{\omega} \theta_{MS}([\rho_{\phi_i}]) = \theta_{CM}(T)$ , qui existe par la proposition 5 (1). Considérons l'ultralimite

$$(X_{\omega}, d_{\omega}, *_{\omega}, \rho_{\omega}) = \lim_{\omega} (X_i = \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3, d_i = \frac{1}{\sqrt{\|\phi_i\|}} d_{\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3}; \Theta_{\phi_i}(x_0), \rho_{\phi_i})$$

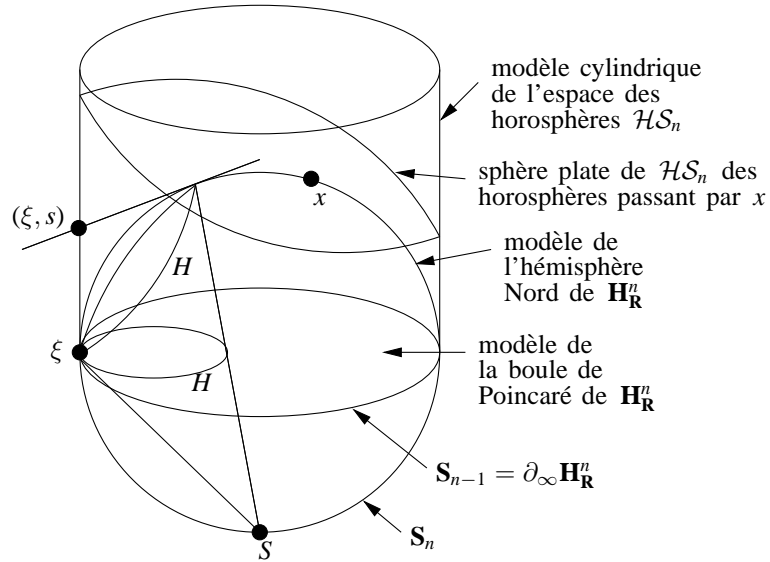
pour la suite de scalaires  $(\sqrt{\|\phi_i\|})_{i \in \mathbf{N}}$  tendant vers  $+\infty$  et la suite de points d'observation  $(\Theta_{\phi_i}(x_0))_{i \in \mathbf{N}}$  (qui sont envoyés à distance uniformément bornée par tout élément fixé de  $\Gamma_g$  pour la distance renormalisée, d'après l'inégalité (1) et l'assertion (1)). Par la proposition 6 (4), l'espace métrique  $(X_{\omega}, d_{\omega})$  est un arbre réel, et l'action  $\rho_{\omega}$  n'a pas de point fixe global, comme dans la démonstration du théorème 11, car la suite  $(*)_{i \in \mathbf{N}}$  définit un point  $*_{\omega}$  dans  $X_{\omega}$  par l'assertion (1) b).

Par le théorème 15 (i), la suite d'applications  $(\Theta_{\phi_i} : \tilde{X} - \tilde{\phi}_i^{-1}(0) \rightarrow X_i)_{i \in \mathbf{N}}$  converge vers une application continue  $\Gamma_g$ -équivariante  $\Theta_{\omega} : \tilde{X} - \tilde{\phi}^{-1}(0) \rightarrow X_{\omega}$ . Celle-ci est constante sur les feuilles de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\phi}$  et isométrique sur tout arc transverse (muni de la pseudo-distance transverse) par la proposition 6 (2) et le théorème 15 (ii). Par la proposition 3 (4), elle induit donc par passage au quotient un morphisme d'arbres réels  $\Gamma_g$ -équivariant  $f : T_{\tilde{\mathcal{F}}_{\phi}} \rightarrow X_{\omega}$ . Par minimalité (au sens des arbres) de  $T_{\tilde{\mathcal{F}}_{\phi}}$ , l'image de  $f$  est contenue dans le sous-arbre minimal  $X_{\omega}^{\min}$  de  $X_{\omega}$ .

Nous avons  $[\ell_T] = [\ell_{X_{\omega}}]$  par les arguments de continuité de la proposition 7. Si  $X_{\omega}$  n'a pas de point fixe global à l'infini, alors, par la remarque 8, à homothétie près,  $T = X_{\omega}^{\min}$ . Sinon, à homothétie près, nous avons  $T = \mathbf{R}$  par complète réductibilité, et il existe un morphisme d'arbres réels  $\Gamma_g$ -équivariant de  $X_{\omega}^{\min}$  dans  $T = \mathbf{R}$  (rétraction de l'immeuble qu'est  $X_{\omega}^{\min}$  sur un de ses appartements passant par un point à l'infini fixe). Le résultat s'en déduit par composition de morphismes.  $\square$

A. DUALITÉ ENTRE L'ESPACE HYPERBOLIQUE RÉEL ET L'ESPACE DE SES HOROSPHERES, D'APRÈS SCHLENKER

Si  $X$  est un espace métrique géodésique propre  $\text{CAT}(-1)$ , notons  $\mathcal{HS}$  l'ensemble des horosphères de  $X$ , muni de la topologie de Chabauty sur les fermés de  $X$  (induite par la distance de Hausdorff sur les compacts, voir par exemple [Pau6, §1.2]). Pour tout  $x_0 \in X$ , l'application  $\mathcal{HS} \rightarrow \partial_\infty X \times \mathbf{R}$ , qui à une horosphère  $H$  associe le couple  $(\xi, t)$  où  $\xi$  est le point à l'infini de  $H$  et  $t = \beta_\xi(x_0, H) = \beta_\xi(x_0, h)$  pour tout  $h \in H$ , est un homéomorphisme, par lequel nous identifierons  $\mathcal{HS}$  et  $\partial_\infty X \times \mathbf{R}$ . Appelé le *paramétrage de Hopf* (en  $x_0$ ), il ne dépend de  $x_0$  qu'à translation près dans le facteur  $\mathbf{R}$ . Il conjugue l'action de  $\text{Isom}(X)$  sur  $\mathcal{HS}$  à l'action  $\gamma \cdot (\xi, t) = (\gamma\xi, t + \beta_\xi(\gamma^{-1}x_0, x_0))$ . Voir par exemple [Rob, Chap. 2 et 6] et [PPS, §10.2] pour des propriétés dynamiques de  $\mathcal{HS}$ .



Soit  $n \geq 2$ , notons  $\mathcal{HS}_n$  l'espace des horosphères de l'espace hyperbolique réel  $\mathbf{H}_\mathbf{R}^n$  de dimension  $n$ . Un modèle de  $\mathcal{HS}_n$ , dit *modèle cylindrique*, est le suivant (voir [Sch, §2,3] pour d'autres modèles et une jolie description de la géométrie de  $\mathcal{HS}_n$ ). Considérons le *modèle de l'hémisphère Nord* (ouvert) de  $\mathbf{H}_\mathbf{R}^n$ , obtenu comme image par la projection stéréographique de pôle Sud, dans la sphère unité  $\mathbf{S}_n$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , du modèle de la boule de Poincaré dans  $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ . Alors  $\mathcal{HS}_n$  s'identifie au demi-cylindre vertical  $\{(\xi, s) \in \mathbf{S}_{n-1} \times \mathbf{R} : s > 0\}$  de base l'équateur  $\mathbf{S}_{n-1} \times \{0\} = \partial_\infty \mathbf{H}_\mathbf{R}^n$  de  $\mathbf{S}_n$ , par l'application qui à

une horosphère  $H$  dans l'hémisphère Nord associe le point  $(\xi, s)$  de ce demi-cylindre tel que  $H$  soit l'ensemble des points de tangences avec l'hémisphère Nord des droites affines de  $\mathbf{R}^{n+1}$  passant par  $(\xi, s)$ . Un petit calcul montre que le paramétrage de Hopf s'écrit  $(\xi, s) \mapsto (\xi, t = -\text{Ln} s)$ , si  $x_0$  est le pôle Nord de  $\mathbf{S}_n$ .

Pour tout  $x \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , notons  $\varphi_x : T_x^1 \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n \rightarrow \partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  le difféomorphisme qui à un vecteur tangent unitaire  $v$  en  $x$  associe le point à l'infini  $v_+$  du rayon géodésique de vecteur vitesse  $v$  en son origine  $x$ . Pour toute isométrie  $\gamma$  de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , nous avons  $\varphi_{\gamma x} \circ \gamma = \gamma \circ \varphi_x$ . L'application  $\varphi_x$  est conforme<sup>10)</sup> pour la structure conforme sur  $T_x^1 \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  définie par sa métrique riemannienne sphérique, et celle sur  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  identifié avec  $\mathbf{S}_{n-1}$  dans le modèle de la boule de Poincaré (ou si  $n = 3$  avec  $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$  muni de sa structure de surface de Riemann).

Notons  $ds_x^2$  la métrique riemannienne sur  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  qui fait de  $\varphi_x$  une isométrie riemannienne. La famille  $(ds_x^2)_{x \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n}$  est injective,  $\Gamma$ -équivariante et conforme: pour tous les  $x, y \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ ,  $\xi \in \partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  et  $\gamma \in \text{Isom}(\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n)$ , si  $ds_x^2 = ds_y^2$ , alors  $x = y$ , et nous avons

$$(4) \quad \gamma^* ds_x^2 = ds_{\gamma^{-1}x}^2 \text{ et } ds_x^2(\xi) = e^{-2\beta_{\xi}(x,y)} ds_y^2(\xi).$$

Elle définit la structure conforme naturelle de  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ .

Pour tout point  $\xi$  de  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  et tout produit scalaire  $B$  dans la structure conforme sur  $T_{\xi}(\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n)$ , l'ensemble

$$H(\xi, B) = \{x \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n : ds_x^2(\xi) = B\}$$

des points  $x$  de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  où l'image de la métrique riemannienne de  $T_x^1 \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  par le difféomorphisme  $\varphi_x$  coïncide au point  $\xi$  avec  $B$ , est une horosphère de point à l'infini  $\xi$ : on le voit géométriquement en se ramenant par isométrie au cas où  $\xi = \infty$  dans le modèle du demi-espace supérieur de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , ou en utilisant la formule (4): si  $B = b ds_{x_0}^2(\xi)$  où  $b > 0$ , alors  $H(\xi, B) = \{x \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n : \beta_{\xi}(x, x_0) = -\frac{1}{2} \text{Ln} b\}$ . L'inverse du paramétrage de Hopf est  $(\xi, t) \mapsto H(\xi, e^{2t} ds_{x_0}^2(\xi))$ .

<sup>10)</sup> Une *structure conforme* sur un espace vectoriel réel est une classe d'homothétie de produits scalaires. Un *isomorphisme linéaire conforme* est un isomorphisme linéaire qui préserve les classes d'homothéties fixées de produits scalaires. Une *structure conforme* sur une variété réelle lisse  $M$  est une section lisse du fibré projectif du fibré des formes bilinéaires symétriques sur  $M$ , qui à tout point  $x$  de  $M$  associe une structure conforme sur l'espace vectoriel  $T_x M$ . Un *isomorphisme conforme* est un difféomorphisme dont les applications tangentes en tout point sont conformes. Par exemple, une métrique riemannienne sur une variété définit une structure conforme, en prenant en chaque point la classe d'homothétie du produit scalaire riemannien. Une surface de Riemann  $M$  porte une structure conforme canonique, qui la détermine avec l'orientation induite, en prenant en chaque point  $x \in M$  la classe d'homothétie d'un produit scalaire rendant orthogonal  $X$  et  $iX$  pour tout  $X \in T_x M$ .

La variété  $\mathcal{HS}_n$ , identifiée avec  $\partial_\infty \mathbf{H}_\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  par le paramétrage de Hopf en  $x_0$ , est munie d'une métrique dégénérée de signature  $(0, n-1)$ , qui sur l'espace tangent à  $(\xi, t)$  vaut  $0 dt^2 + e^{2t} ds_{x_0}^2$ . Cette métrique est indépendante de  $x_0$  et invariante par l'action de  $\text{Isom}(\mathbf{H}_\mathbf{R}^n)$ . Les sous-espaces des horosphères passant par un point donné de  $\mathbf{H}_\mathbf{R}^n$  sont les *sphères plates* de  $\mathcal{HS}_n$ , c'est-à-dire les hypersurfaces de  $\mathcal{HS}_n$ , en restriction auxquelles la métrique de  $\mathcal{HS}_n$  est non dégénérée, totalement géodésique et isométrique à  $\mathbf{S}_n$ . Dans le modèle cylindrique de  $\mathcal{HS}_n$ , ce sont les intersections avec  $\mathcal{HS}_n$  des hyperplans de  $\mathbf{R}^{n+1}$  tangents au point donné à l'hémisphère Nord. Tout hyperplan tangent à  $\mathcal{HS}_n$  *non vertical* (ne contenant pas de vecteur non nul tangent au facteur  $\mathbf{R}$  dans le paramétrage de Hopf, ou ne contenant pas de droite verticale dans le modèle cylindrique) est tangent à une et une seule sphère plate de  $\mathcal{HS}_n$ .

LEMME 17. *Soit  $F^* : \Omega \rightarrow \mathcal{HS}_n$  une immersion  $C^1$  de codimension 1 dont aucun plan tangent n'est vertical. Il existe une unique application continue  $F : \Omega \rightarrow \mathbf{H}_\mathbf{R}^n$  telle que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit vérifiée, et  $F$  est lisse si  $F^*$  est lisse :*

- (1) *pour tout  $\zeta \in \Omega$ , le point  $F(\zeta)$  est le point commun des horosphères de l'unique sphère plate de  $\mathcal{HS}_n$  dont un espace tangent est  $T_\zeta F^*(T_\zeta \Omega)$  ;*
- (2) *le point  $F(\zeta)$  appartient à l'horosphère  $F^*(\zeta)$  pour tout  $\zeta \in \Omega$ .*

*Démonstration.* L'existence, l'unicité et la régularité de  $F$  vérifiant (1) est immédiate par ce qui précède. L'assertion (1) implique (2). Supposons (2) vérifiée. Dans les modèles de l'hémisphère Nord de  $\mathbf{H}_\mathbf{R}^n$  et cylindrique de  $\mathcal{HS}_n$ , pour toute suite  $(\zeta_i)_{i \in \mathbf{N}}$  qui tend vers  $\zeta$  dans  $\Omega$ , l'hyperplan affine de  $\mathbf{R}^{n+1}$  tangent à l'hémisphère Nord en  $F(\zeta_i)$ , qui contient le point  $F^*(\zeta_i)$  du demi-cylindre vertical, converge vers celui en  $F(\zeta)$ , qui contient  $F^*(\zeta)$ , par continuité. Donc la limite contient  $T_\zeta F^*(T_\zeta \Omega)$  et l'assertion (1) est vérifiée.  $\square$

Avec la terminologie de la remarque 13, l'assertion (2) signifie que l'application  $F : \Omega \rightarrow \mathbf{H}_\mathbf{R}^n$  est une enveloppe de la famille d'horosphères  $(F^*(\zeta))_{\zeta \in \Omega}$ . Notons que  $F$  n'est pas forcément une immersion (par exemple,  $F$  est constante si l'image de  $F^*$  est une sphère plate de  $\mathcal{HS}_n$ ). Si  $F^*$  s'écrit  $\zeta \mapsto (\xi(\zeta), t(\zeta))$  dans le paramétrage de Hopf en  $x_0$ , alors, pour tout  $\zeta \in \Omega$ , les trois conditions

$$(5) \quad F(\zeta) \in F^*(\zeta), \quad \beta_{\xi(\zeta)}(x_0, F(\zeta)) = t(\zeta) \quad \text{et} \quad ds_{F(\zeta)}^2(\xi(\zeta)) = e^{2t(\zeta)} ds_{x_0}^2$$

sont équivalentes. Si de plus  $F$  est une immersion, alors  $F^*(\zeta)$  est une horosphère tangente à l'image de  $F$  en  $F(\zeta)$ . Nous renvoyons à [Sch, §2,3] pour d'autres informations sur les géométries relatives de  $F$  et  $F^*$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [Bes1] BESTVINA, M. Degenerations of the hyperbolic space. *Duke Math. J.* 56 (1988), 143–161.
- [Bes2] ———  $\mathbf{R}$ -trees in topology, geometry, and group theory. *Handbook of Geometric Topology*, North-Holland 2002, 55–91.
- [Bourb] BOURBAKI, N. *Topologie générale*. Chap. 1 à 4, Hermann 1971.
- [Bourd] BOURDON, M. Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow. *Geom. Func. Anal.* 7 (1997), 245–268.
- [Bre] BREMIGAN, R. Quotients for algebraic group actions over non-algebraically closed fields. *J. reine angew. Math.* 453 (1994), 21–47.
- [BH] BRIDSON, M. R. et HAEFLIGER, A. *Metric spaces of non-positive curvature*. Grund. math. Wiss. 319, Springer-Verlag, 1999.
- [Bor] BOREL, A. Linear algebraic groups. *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, A. Borel and G. D. Mostow eds, Proc. Sympos. Pure Math. (Boulder, 1965), pp. 20–25, Amer. Math. Soc. 1966.
- [CM] CULLER, M. et MORGAN, J. Groups actions on  $\mathbf{R}$ -trees. *Proc. Lond. Math. Soc* 55 (1987), 571–604.
- [dMvS] DE MELO, W. et VAN STRIEN, S. *One dimensional dynamics*. Erg. Math. Grenz. 25, Springer-Verlag, 1993.
- [DW] VAN DEN DRIES, L. et WILKIE, A. On Gromov’s theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic. *J. Algebra* 89 (1984), 349–374.
- [Dum1] DUMAS, D. Complex projective structures. *Handbook of Teichmüller Theory Vol. II*, A. Papadopoulos ed., Euro. Math. Soc. 2009, 455–508.
- [Dum2] ——— Holonomy limits of complex projective structures. Prépublication [arXiv : 1105.5102].
- [DP] DYUBINA, A. et POLTEROVICH, I. Structures at infinity of hyperbolic spaces. *Uspekhi Mat. Nauk* 53 (1998), no. 5 (323), 239–240.
- [Eps] EPSTEIN, C. L. Envelopes of horospheres and Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space. Non publié  
<http://www.math.upenn.edu/~cle/papers/WeingartenSurfaces.pdf> .
- [FLP] FATHI, A., LAUDENBACH, F. et POENARU, V. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Astérisque 66-67, Soc. Math. France 1979.
- [GP] GABORIAU, D. et PAULIN, F. Sur les immeubles hyperboliques. *Geom. Dedicata* 88 (2001), 153–197.
- [GKM] GALLO, D., KAPOVICH, M. et MARDEN, A. The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces. *Ann. of Math.* 151 (2000), 625–704.
- [Gar] GARDINER, F. *Teichmüller theory and quadratic differentials*. Wiley 1987.
- [GS] GILLET, H. et SHALEN, P. Dendrology of groups in low  $\mathbf{Q}$ -ranks. *J. Diff. Geom.* 32 (1990), 605–712.
- [Gro1] GROMOV, M. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Pub. Math. I.H.É.S.* 53 (1981), 53–78.
- [Gro2] ——— Asymptotic invariants of infinite groups. *Geometric group theory Vol. 2*, (Sussex, 1991) A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS 182, Cambridge Univ. Press 1993.

- [Hej] HEJHAL, D. Monodromy groups and Poincaré series. *Bull. Amer. Math. Soc.* 84 (1978), 339–376.
- [HP] HAGLUND, F. et PAULIN, F. Simplicité de groupes d’automorphismes d’espaces à courbure négative. *Geometry and Topology Monographs Vol 1: The Epstein Birthday Schrift*, I. Rivin, C. Rourke, C. Series eds, International Press 1998, 181–248.
- [KaL] KAPOVICH, M. et LEEB, B. On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds. *Geom. Func. Anal.* 5 (1995), 582–603.
- [KT] KERCKHOFF, S. et THURSTON, W. Non continuity of the action of the modular group at Bers’ boundary of Teichmüller space. *Invent. Math.* 100 (1990), 25–47.
- [Leh] LEHTO, O. Univalent functions, Schwarzian derivatives and quasiconformal mappings. *L’Enseign. Math.* 24 (1978), 203–214.
- [LP] LEVITT, G. et PAULIN, F. Geometric group actions on trees. *Amer. Jour. Math.* 119 (1997), 83–102.
- [Lun] LUNA, D. Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie. *Amer. J. Math.* 97 (1975), 172–181.
- [MT] MATSUZAKI, K. et TANIGUCHI, M. *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*. Oxford Univ. Press 1998.
- [Mor] MORGAN, J.  $\Lambda$ -trees and their applications. *Bull. A.M.S.* 26 (1992), 87–112.
- [MO] MORGAN, J. et OTAL, J.-P. Relative growth rate of closed geodesics on a surface under varying hyperbolic structures. *Comm. Math. Helv.* 68 (1993), 171–208.
- [MS1] MORGAN, J. et SHALEN, P. Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I. *Ann. of Math.* 122 (1985), 398–476.
- [MS2] — Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III. *Ann. of Math.* 127 (1988), 403–519.
- [OT1] OVSIENKO, V. et TABACHNIKOV, S. *Projective differential geometry old and new. From the Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups*. Camb. Tracts Math. 165, Cambridge Univ. Press 2005.
- [OT2] — What is ... the Schwarzian derivative? *Notices Amer. Math. Soc.* 56 (2009), 34–36.
- [Par1] PARREAU, A. Espaces de représentations complètement réductibles. *J. London Math. Soc.* 83 (2011), 545–562.
- [Par2] — Compactification d’espaces de représentations de groupes de type fini. *Math. Z.* 272 (2012), 51–86.
- [Pau1] PAULIN, F. Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Invent. Math.* 94 (1988), 53–80.
- [Pau2] — The Gromov topology on  $\mathbf{R}$ -trees. *Topology Appl.* 32 (1989), 197–221.
- [Pau3] — Action de groupes sur les arbres. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995-96, exposé 808, *Astérisque 241*, Soc. Math. France 1997.
- [Pau4] — Dégénérescence de sous-groupes discrets de groupes de Lie semi-simples. *Comp. Rend. Acad. Scien. Paris.* 324 (1997), 1217–1220.
- [Pau5] — Sur la compactification de Thurston de l’espace de Teichmüller. *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, L. Bessières, A. Parreau, B. Remy eds (Actes de l’école d’été de l’Institut



- Fourier, Grenoble, 2004), *Sémi. Congrès 18*, Soc. Math. France 2009, 421-443.
- [Pau6] — De la géométrie et de la dynamique de  $SL_n(\mathbf{R})$  et  $SL_n(\mathbf{C})$ . *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques* (avec Gilles Courtois et Françoise Dal'Bo), Journées X-UPS 2007, N. Berline, A. Plagne, C. Sabbagh eds., Editions Ecole Polytechnique, 2007, 47–110.
- [PPS] PAULIN, F., POLLICOTT, M. et SCHAPIRA, B. Equilibrium states in negative curvature. Livre en prépublication [arXiv : 1211.6242].
- [Per] PERRIN, D. Géométrie algébrique : une introduction, Interéditions/CNRS éditions, 1995.
- [PV] POPOV, V. L. et VINBERG, E.B. Invariant theory. *Algebraic geometry IV*, A. Parshin, I. Shavarevich eds., Encyc. Math. Scien. 55, Springer-Verlag, 1994.
- [RS] RICHARDSON, R. W. et SLODOWY, P. J. Minimum vectors for real reductive algebraic groups. *J. London Math. Soc.* 42 (1990), 409–429.
- [Rob] ROBLIN, T. *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*. Mémoire Soc. Math. France 95, 2003.
- [Sai] DE SAINT-GERVAIS, H. P. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010.
- [Sch] SCHLENKER, J.-M. Hypersurfaces in  $\mathbf{H}^n$  and the space of its horospheres. *Geom. Funct. Anal.* 12 (2002), 395–435.
- [Ser] SERRE, J.-P. Complète réductibilité. Séminaire Bourbaki 2003–2004, Exp. 932, pp. 195–217, *Astérisque* 299, Soc. Math. France, 2005.
- [Sha1] SHALEN, P. Dendrology of groups : an introduction. *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer-Verlag 1987, 265–319.
- [Sha2] — Dendrology and its applications. *Group theory from a geometrical viewpoint* (Trieste, 1990), World Sci. Publ. 1991, 543–616.
- [Sko] SKORA, R. Splittings of surfaces. *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), 605–616.
- [Thu] THURSTON, W. *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton Math. Ser. 35, Princeton Univ. Press 1997.
- [Tit] TITS, J. A “theorem of Lie-Kolchin” for trees. *Contributions to Algebra : a collection of papers dedicated to Ellis Kolchin*, H. Bass et al eds, Academic Press 1977, 377–388.

Frédéric Paulin

Département de mathématique, Bât. 425, UMR 8628 CNRS  
 Université Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE  
*courriel* : frederic.paulin@math.u-psud.fr