# Université Paris-Saclay • M2 Analyse Modélisation Simulation

## Cours d'introduction à l'analyse spectrale (2015-2016, 1er semestre)

Stéphane Nonnenmacher
Pour me contacter : stephane.nonnenmacher@math.u-psud.fr.
Mon bureau est le 148 (1er étage droite) dans le bâtiment 425.

## Feuille d'exercices no. 2

**Exercice 2.1. Opérateur $D_x$ sur l'intervalle**

a) Sur $L^2([0,1])$ on consideère l'opérateur $A_0\psi = D_x\psi = \frac{1}{i}\psi'$, avec pour domaine $D(A_0) = H^1([0,1])$.

$A_0$ est-il symétrique ? Auto-adjoint ? Borné inférieurement ? Quel est son spectre ? De quelle nature est son spectre ?

b) Mêmes questions pour l'opérateur $A_1\psi = D_x\psi$ agissant sur le domaine $H^1_0([0,1])$. Y a-t-il un lien entre ces deux opérateurs ?

d) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, on considère $A_\alpha\psi = D_x\psi$ agissant sur $D(A_\alpha) = \{\psi \in C^\infty([0,1]),\ \psi(1) = \alpha\psi(0)\}$. Calculer sa fermeture $\bar{A}_\alpha$ et son adjoint. Pour quelles valeurs de $\alpha$ $\bar{A}_\alpha$ est-il autoadjoint ? Calculer le spectre de $\bar{A}_\alpha$, et vérifier qu'il est compatible avec le résultat précédent.

**Exercice 2.2. Laplaciens de Robin**

On cherche à définir une version du Laplacien sur $[0,1]$ avec des conditions aux bords interpolant entre les conditions de Dirichlet et les conditions de Neumann. Pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, on définit la forme quadratique

$$q_\alpha(\varphi,\psi) = \int_0^1 \bar{\varphi}'(x)\psi'(x)\,dx - \alpha\big(\bar{\varphi}(1)\psi(1) + \bar{\varphi}(0)\psi(0)\big)\,,$$

sur le domaine $D(q_\alpha) = C^\infty([0,1])$.

a) Cette forme est-elle symétrique ? Bornée inférieurement ? (Discuter selon le signe de $\alpha$).

b) $q_\alpha$ est-elle fermée ? Sinon, est-elle fermable ? Quel est alors le domaine de sa fermeture $\bar{q}_\alpha$ ?

c) Décrire l'opérateur $A_\alpha$ associé à $\bar{q}_\alpha$. On appelle cet opérateur un Laplacien avec conditions au bord de Robin. Quelle est la nature de son spectre ? Calculer son spectre, et discuter ses variations en fonction de $\alpha$.

d) Généraliser cette construction à un laplacien sur $\Omega$ un domaine borné à bord lisse sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

**Exercice 2.3. Inégalité de Hardy**

On se place sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, et on cherche à montrer l'inégalité de Hardy :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi(x)|^2\,dx \geq \frac{(d-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi(x)|^2}{|x|^2}\,dx.$$

a) Vérifier que les deux membres sont finis pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

b) Pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$, et pour chaque indice $j = 1,\dots,d$ on considère l'opérateur

$$A_{j,\gamma}\psi(x) = D_{x_j}\psi(x) + i\gamma\frac{x_j}{|x|^2}\psi(x).$$

Vérifier que $A_{j,\gamma}\psi \in L^2$ pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Développer l'inégalité $\|A_{j,\gamma}\psi\|_{L^2}^2 \geq 0$, puis en déduire l'inégalité de Hardy.

c) Rappeler l'inégalité de Heisenberg sur $\mathbb{R}$. En déduire l'inégalité de Heisenberg sur $\mathbb{R}^d$, et la comparer avec l'inégalité de Hardy.

**Exercice 2.4. Produit $A^*A$ et opérateur normal**

a) Dans un premier temps on veut construire, à partir de $A$ un opérateur fermé, de domaine $D(A)$ dense dans $\mathcal{H}$, l'opératuer $A^*A$. On considère l'opérateur $L$ donné par

$$L\psi = A^*A\psi, \quad \psi \in D(L) = \{\psi \in D(A),\ A\psi \in D(A^*)\}.$$

On va voir si ce domaine de définition est optimal pour cet opérateur.

i) On considère la forme quadratique $b(\varphi,\psi) = \langle A\varphi, A\psi\rangle + \langle\varphi,\psi\rangle$, de domaine $D(b) = D(A)$. Montrer que $b$ est fermée.

ii) On appelle $B$ l'opérateur associé à cette forme. Identifier le domaine de $B$, et montrer le lien entre $B$ et $L$. En déduire que $L$ est densément défini, auto-adjoint et positif.

iii) Etudier le cas des opérateurs $A_0, A_1, A_\alpha$ de l'exercice 2.1.

b) On dit qu'un opérateur $A$ sur un Hilbert $\mathscr{H}$ est *normal* si $D(A) = D(A^*)$ et $\|A\psi\| = \|A^*\psi\|$ pour tout $\psi \in D(A)$.

i) Montrer qu'un opérateur normal est fermé.

ii) Supposons $A$ fermé. Montrer que $A$ est normal ssi $A^*$ l'est.

iii) Soit $A$ un opérateur normal. Montrer que $\langle A\varphi, A\psi\rangle = \langle A^*\varphi, A^*\psi\rangle$ pour tous $\varphi,\psi \in D(A)$.

iv) Soit $A$ un opérateur fermé. On construit les opérateurs $A^*A$ et $AA^* = (A^*)^*A^*$ comme en a). Montrer que $A$ est normal ssi $A^*A = AA^*$.

v) Soit $A$ un opérateur normal *compact*. Montrer que $A$ admet une base orthonormée de vecteurs propres.