

# Rappels et notations sur les ensembles

Stéphane Nonnenmacher

## 1 Diverses notations sur les ensembles

1. On appellera  $X$  (ou  $E$ ) l'ensemble global sur lequel nous travaillerons. L'ensemble des parties de  $E$  est noté  $\mathcal{P}(X)$ . Les parties (= sous-ensembles) de  $X$  sont notées  $A, B$  etc. “ $A$  est une partie de  $X$ ” se note  $A \subset X$  ou  $X \supset A$ .
2. On notera l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , et  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Pour deux entiers  $j \leq k$ , on notera  $\llbracket j, k \rrbracket = [j, k] \cap \mathbb{N}$  l'intervalle discret entre  $j$  et  $k$ .
3. Un ensemble  $X$  peut être :
  - a) vide, s'il ne contient aucun élément :  $X = \emptyset$ .
  - b) fini, s'il contient un nombre fini d'éléments : il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , où tous les  $x_i$  sont distincts. Autrement dit, il existe une bijection  $i : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow X$ . Rappelons que l'ordre des éléments d'un ensemble est indifférent :  $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$ . Le cardinal de  $X$ , qu'on note  $\#X$  ou  $|X|$ , est égal à  $n$ .
  - c) infini dénombrable s'il existe une bijection  $i : \mathbb{N}^* \rightarrow X$ . Autrement dit, les éléments de  $X$  peuvent être indicés par les entiers naturels :  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . Le choix de commencer le comptage par  $x_1$  est une convention : on pourrait aussi prendre  $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ .
  - d) infini indénombrable, s'il n'existe pas d'application surjective  $s : \mathbb{N}^* \rightarrow X$ . L'hypothèse du continu consiste à dire qu'un ensemble infini indénombrable a au moins le cardinal du continu : il existe une injection  $i : \mathbb{R} \rightarrow X$ . Autrement dit, il n'existe pas d'infini “strictement plus gros que  $\mathbb{N}$ , et strictement plus petit que  $\mathbb{R}$ ”.

**Exercice 1.** Montrer que les ensembles  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}^2$  sont dénombrables.

4. Pour un ensemble d'indices  $I$  (qui peut être fini, dénombrable ou indénombrable), on note  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $X$ , indexée par  $I$ . Si  $I$  est fini (respectivement dénombrable), on pourra alors noter  $(A_j)_{j=1, \dots, n}$  (respectivement  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  ou  $(A_j)_{j \geq 1}$ ).

## 2 Opérations sur les ensembles

La notation  $a := b$  indiquera que la quantité  $a$  est définie par  $b$ . L'égalité ne provient pas du résultat d'un calcul ou d'un raisonnement, mais d'une définition.

La notation  $\{x \in X ; x \in A\}$  signifie “l'ensemble des tous les éléments  $x$  dans  $X$  qui satisfont la propriété “ $x \in A$ ”. Elle est équivalente aux notations  $\{x \in X : x \in A\}$  ou  $\{x \in X \mid x \in A\}$ .

1. Union :  $A \cup B := \{x \in X ; x \in A \text{ ou } x \in B\}$ . Plus généralement, pour  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $X$  (de cardinal quelconque),

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X ; \text{il existe au moins un indice } i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}.$$

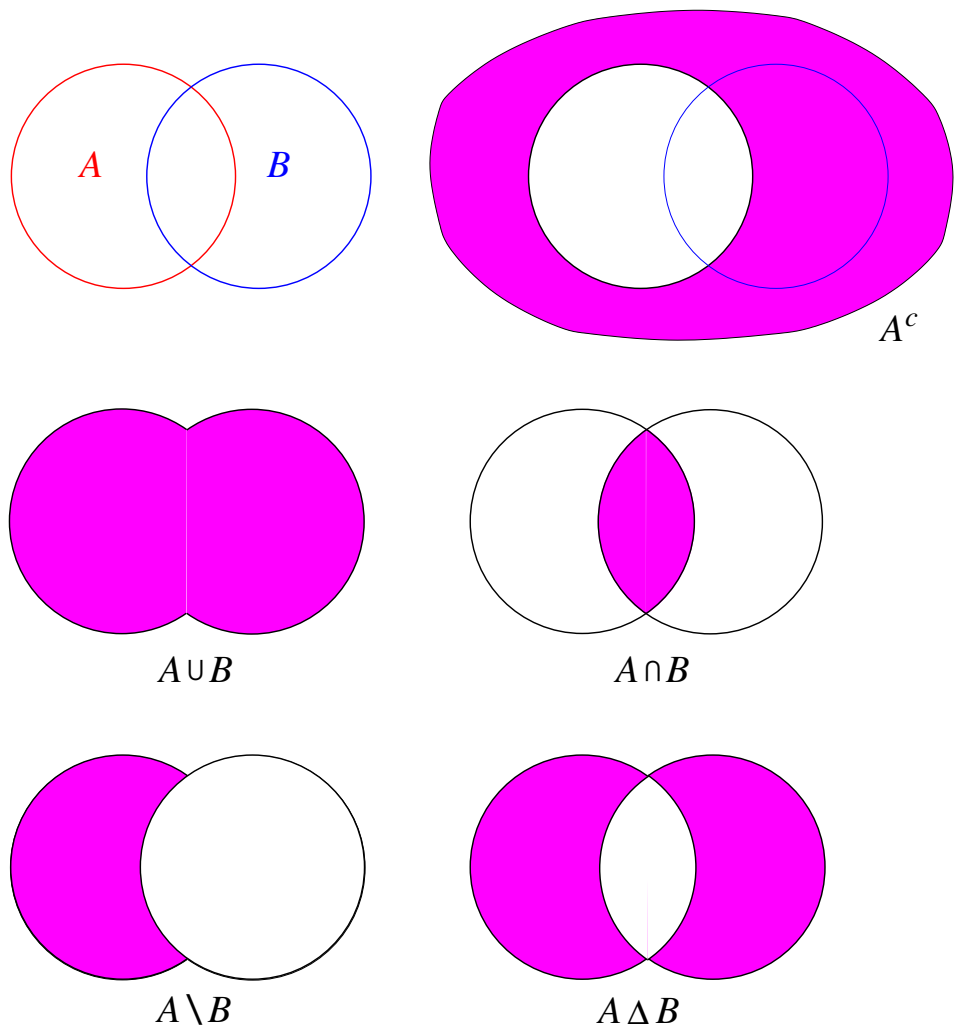


FIGURE 2.1 – Opérations élémentaires sur 2 sous-ensembles  $A, B \subset X$

Si les  $(A_i)_{i \in I}$  sont deux à deux disjoints ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour tous  $i \neq j$ ), alors ils forment une union disjointe, qu'on note  $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ .

2. Intersection :  $A \cap B := \{x \in X ; x \in A \text{ et } x \in B\}$ . Plus généralement, pour  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $X$ ,

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X ; x \in A_i \text{ pour tous les indices } i \in I\}.$$

3. Différence :  $A \setminus B := \{x \in X ; x \in A \text{ et } x \notin B\}$ .

4. Différence symétrique :

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in X ; [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \notin A]\}.$$

5. Complémentaire :  $A^c := X \setminus A = \{x \in X ; x \notin A\}$ . Le complémentaire est aussi noté  $\complement A$ . Remarquons que la notation  $A^c$  suppose que l'ensemble global de référence  $X$  est connu (il est sous-entendu dans la notation).

6. Produit cartésien. Si  $X, Y$  sont deux ensembles, alors  $X \times Y := \{(x, y) ; x \in X \text{ et } y \in Y\}$ . C'est l'ensemble de toutes les paires contenant un élément de  $X$  et un élément de  $Y$ . Plus généralement, pour  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  une famille d'ensembles, le produit cartésien

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_j \in X_j, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

est l'ensemble de *tous* les  $n$ -uplets dont le 1er élément est dans  $X_1$ , le second élément est dans  $X_2$ , etc.

7. Distributivité des opérations d'union et d'intersection :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

8. Opérations sur le complémentaire :

$(A^c)^c = A$ . Si  $A \subset B$ , alors  $A^c \supset B^c$ .

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ , et par conséquent  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

$A \setminus B = A \cap B^c$ .  $A \Delta B = A^c \Delta B^c$ .

### 3 Image (réciproque) par une application

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application.

1. Image (directe). Pour  $A \subset X$ ,  $f(A) := \{f(x) ; x \in A\}$ . L'image directe du singleton  $\{x\}$  est égale au singleton  $\{y\}$ , avec  $y = f(x)$ .
2. Image réciproque : pour toute partie  $B \subset Y$ , l'image réciproque  $f^{-1}(B) := \{x \in X ; f(x) \in B\}$ . Notons que si on considère un singleton  $B = \{y\}$ , son image réciproque  $f^{-1}(\{y\})$  n'est pas forcément réduite à un seul élément de  $X$  : cette image réciproque peut être vide, ou contenir plusieurs éléments.
3. Relations avec les opérations :

$f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$ .  $f(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f(A_i)$ .

$f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$ .  $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$ .

Les deux dernières expressions ne sont valables que pour l'image réciproque :  $f^{-1}(\bigsqcup_i A_i) = \bigsqcup_i f^{-1}(A_i)$ ,  $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ .