INVOLUZIONI ANTISIMPLETTICHE SU VARIETÀ HYPERKÄHLER

in collaborazione con:

Laure Flapan, Kieran O'Grady e Giulia Saccà

Teorema principale

(X, λ) $\quad X$ var. HK liscia proiettiva

equiv. defo a $\mathrm{Hilb}^n(K3)$

$\dim X = 2g \qquad g \geq 1$

forma di BBF

λ polarizz. primitiva, $\lambda^2 = 2$

($\rightsquigarrow$ $\mathrm{div}(\lambda) = 1, 2$, dove $\lambda . H^2(X, \mathbb{Z}) = (\mathrm{div}(\lambda))$
$\subseteq \mathbb{Z}$

Teo di Torelli
(Verbitsky)

+

Teo Monodromia
(Markman)

$$\rho_\lambda(x) = -x + (\lambda, x)\cdot\lambda$$

BBF

sull' $H^2(X,\mathbb{Z})$

$\rho_\lambda(\lambda) = \lambda$ ampio

$\rightsquigarrow \exists\, \tau : X \xrightarrow{\sim} X$ t.c. $\tau^2 = id$

antisimplettica $\tau_* = \rho_\lambda$

Teo (1) Il numero di componenti connesse di $\mathrm{Fix}(\tau)$ è uguale a $\mathrm{div}(\lambda)$.

(2) Se $\mathrm{div}(\lambda) = 2$, allora una componente è una varietà di Fano

dim $= g$

indice $= 3$

$g = 4, 8$ ✓ $\rightsquigarrow$ $\left[\begin{array}{l} \rho = 1 \\ h^{3,1} = 1 \end{array}\right.$

Ex & Motivazione 1

Y cubica, $\dim Y = 4$

$Y \rightsquigarrow F(Y)$ = varietà delle rette $\subseteq Y$ HK4 [BD]

$Y \rightsquigarrow X(Y)$ = varietà delle (classi di equiv.) di cubiche gobbe $\subseteq Y$ HK8 [LLSVS]

$\nexists \, \mathbb{P} \not\subseteq Y$

piano

$(F, h) \quad h^2 = 6\,,\ \mathrm{div}(h) = 2$

$(X, \lambda) \quad \lambda^2 = 2\,,\ \mathrm{div}(\lambda) = 2 \quad \| \longleftarrow$ nostro teorema (!)

associamo $\tau \rightsquigarrow \mathrm{Fix}(\tau) = Y \sqcup \tilde{Y}$

$\boxed{g = 4}$

cubica stessa !

(F, h) $h^2 = 2n$

$\mathrm{div}(h) = 2$

$(\Leftrightarrow n \equiv 3 \bmod 4)$

$\overset{\leadsto}{\text{dualità}}$ (X, λ) $\lambda^2 = 2$

$\mathrm{div}(\lambda) = 2$

HK4

K3-type

HK 2n+2

K3-type

$\overset{\leadsto}{\text{teorema}}$ Y varietà di Fano, $\dim Y = n+1$

A livello di categorie:

Y cubica $\underset{\text{Kuznetsov}}{\rightsquigarrow}$ $D^b Y = \langle \mathcal{D}_Y, \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2) \rangle$

- $\mathcal{D}_Y$ categoria K3
- $\sigma \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D}_Y)$ [Bayer-Lahoz-M-Stellari]
- $(F, h) \cong (M_\sigma(\lambda), \ell_\sigma)$ [Li-Pertusi-Zhao

Ex & Motivazione 2

V_6 sp. vett. dim 6

$A \subseteq \Lambda^3 V_6$ sotto sp. Lagrangiano
(dim $A = 10$)

$\rightsquigarrow$ $Y_A \subseteq \mathbb{P}V_6$, $Y_6 = \left\{ [v] \in \mathbb{P}V_6 : \begin{array}{l} A \xrightarrow{\varphi_v} \Lambda^2 V_6 \\ \alpha \mapsto v \wedge \alpha \end{array} \text{ ha nucleo } \neq 0 \right\}$

<u>Thm</u> (O'Grady) A generico

Ferretti
Iliev-Manivel
(di tipo gen.)

- Y_A | sestica singolare,
  | ipersup.

$\operatorname{sing}(Y_A) = \Sigma_A$ superficie liscia irrid.

- $X_A \xrightarrow[f]{2:1} Y_6$ ramif. su Y_A

X_A HK liscia, proietti, dim $= 4$
tipo K3.

- $\lambda_A = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}V_6}(1)$ ampio, $\lambda_A^2 = 2$, $\operatorname{div}(\lambda_A) = 1$

Abbiamo: τ inv. associata a f

$\rightsquigarrow \tau = \tau$ associata a λ.

$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Fix}(\tau) = \Sigma_A$.

Ferretti $\rightsquigarrow$ Σ_A non si muove, però

${}_2\Sigma_A$ si muove

$\rightsquigarrow$ covering family of Lagrangians cycles

Idea dimostrazione del teorema principale

$(X, \lambda) \rightsquigarrow \tau : X \xrightarrow{\sim} X \quad \tau^2 = \mathrm{id}$

HK dim $2g$ $\qquad \lambda^2 = 2$

Degenerare al caso dove

X singolare

$\underline{\text{Ex}}$ Y cubic $\rightsquigarrow$ cubica nodale (A)

$\rightsquigarrow$ cubica determinantale (B)

(A) (C. Lehn) (S, h) S K3, $h^2 = 6$ $\leftarrow$ v. generale

$\underline{v} = (0, h, -3)$

$\mathcal{O}_S(-h) \otimes D$

$$\begin{tikzcd}
M = M_h(\underline{v}) \arrow[loop above, "\tau"] \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "\text{Mukai flop}"', "\text{su } \check{\mathbb{P}}^4"'] \arrow[d, "\pi"'] & M_0 \arrow[loop above, "\tau"] \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "\text{Mukai flop}"', "\mathbb{P}^2\text{-bdl su } S \times S"'] & M_1 \arrow[loop above, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"] \\
\check{\mathbb{P}}^4 \arrow[u, bend left, "s"] & & \boxed{\overline{M} \circlearrowleft \tau}
\end{tikzcd}$$

φ div.

$\mathrm{Fix}(\tau) = s(\check{\mathbb{P}}^4) \sqcup \tilde{Y}'$

$\overline{L_C \text{ su } C \in |h|}$

$L_C^2 \cong \mathcal{O}_C \quad L_C \not\cong \mathcal{O}_C$

Prop
- flop non creano / distruggono comp. connesse di $\mathrm{Fix}(\tau)$
- $(\overline{M}, \tau)$ è la specializzazione che vogliamo.

e.g.,

$$\begin{tikzcd} \check{\mathbb{P}}^4 \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & \mathbb{P}^4 & \mathrm{Bl}_S \mathbb{P}^4 \arrow[l] \arrow[r] & \overline{Y} & \text{cubica} \\ & & LG(2,4) \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r] & p \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & \text{pt. sing.} \end{tikzcd}$$

In generale:

St. 1: teoria defo "con involuzione"
(caso singolare)

St.2: Studiare la specializzazione esplicitamente

(S, h) S K3 , $h^2 = 2n$ $g = n+1$

$4 \mid g$ $\quad \underline{v} = (0, h, -n)$

$$
\begin{tikzcd}
\tau \circlearrowright M = M_h(\underline{v}) \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "\text{flop}"', "\check{\mathbb{P}}^g"' near end] \arrow[d, "\pi"', shift right] & M_0 \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "S\times S"'] & M_1 \arrow[r, dashed, leftrightarrow, "\mathrm{Hilb}^2 S \times \mathrm{Hilb}^2 S"'] & \cdots \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & M_{g/4} \arrow[d, "\varphi"'] \\
\check{\mathbb{P}}^g \arrow[u, bend left, "s"] & & \text{div.} & & \boxed{\overline{M} \circlearrowleft \tau}
\end{tikzcd}
$$

- $\mathrm{Fix}(\tau)$ ha 2 comp. conn. su M
- tutto funziona bene come nel caso delle cubiche

• e.g.,

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y_0 \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & & & & \\
\check{\mathbb{P}}^g \arrow[r, leftrightarrow, dashed] & \mathbb{P}^g \arrow[d, phantom, "\cup"] & Bl_S \mathbb{P}^g \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow, dashed, "\text{anti-flip}"', "\text{su } Hilb^2 S"' yshift=-12pt] & Y_1 \arrow[r, leftrightarrow, dashed] & \cdots \arrow[r, leftrightarrow, dashed] & Y_{g/n} \arrow[d, "\varphi"] \\
 & S & & & & \overline{Y}
\end{tikzcd}
$$

St. 3: Luoghi fissi in famiglia.

Comologia della comp. di Fano & categ. derivata

Conj Y comp. di Fano, $m = \frac{n+1}{4} = \frac{g}{4}$

K3

$$D^bY = \langle \mathcal{D}^{[m]},$$
$$\mathcal{O}_Y, \mathcal{D}, \mathcal{D}^{[2]}, \dots, \mathcal{D}^{[m-1]},$$
$$\mathcal{O}_Y(1), \mathcal{D}\otimes\mathcal{O}_Y(1), \dots, \mathcal{D}^{[m-1]}\otimes\mathcal{O}_Y(1),$$
$$\mathcal{O}_Y(2), \mathcal{D}\otimes\mathcal{O}_Y(2), \dots, \mathcal{D}^{[m-1]}\otimes\mathcal{O}_Y(2)\rangle$$

Conj. OK (modulo mutazioni ...) se $g=8$

Thm $g=8$

Il diamante di Hodge di Y è:

1	— H^0
1	— H^2
1 21 1	— H^4
1 23 1	— H^6
1 22 253 22 1	— H^8