

INVOLUZIONI ANTISIMPLETTICHE SU VARIETÀ HYPERKÄHLER

in collaborazione con:

Laure Flapan, Kieran O'Grady e Giulia Sacca

Teorema principale

(X, λ) X var. HK liscia proiettiva
equiv. defo a $\text{Hilb}^n(K_3)$

$\dim X = 2g$ $g \geq 1$ } forma di BBF

λ polarizz. primitiva, $\lambda^2 = 2$

$(\rightsquigarrow \text{div}(\lambda) = 1, 2, \text{ dove } \lambda \cdot H^2(X, \mathbb{Z}) = (\text{div}(\lambda)) \subseteq \mathbb{Z}$

Teo di Torelli
(Verbitsky)

+

Teo Monodromia
(Markman)

$$f_\lambda(n) = -n + (\lambda, n) \cdot \lambda \quad \text{BBF}$$

sull' $H^2(X, \mathbb{Z})$

$$f_\lambda(\lambda) = \lambda \quad \text{ampio}$$

$\leadsto \exists \tau: X \xrightarrow{\sim} X$ t.c. $\tau^2 = \text{id}$
antisimplettica $\tau_* = f_\lambda$

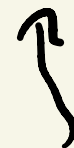
Teo (1) Il numero di componenti connesse di $\text{Fix}(\tau)$ è uguale a $\text{div}(\lambda)$.

(2) Se $\text{div}(\lambda) = 2$, allora una componente è una varietà di Fano

$$g = 4, 8 \checkmark$$



$$\left[\begin{array}{l} \rho = 1 \\ h^{3,1} = 1 \end{array} \right.$$



$$\dim = g$$

$$\text{indice} = 3$$

Ex & Motivazione I

Y cubica, $\dim Y = 4$

Y \rightsquigarrow $F(Y) =$ varietà delle rette $\subseteq Y$ HK4
[BD]

Y \rightsquigarrow $X(Y) =$ varietà delle (classi di equiv.)
di cubiche gobbe $\subseteq Y$ HK8
[LLSVS]

\nearrow
 $\mathbb{P}^2 \not\subseteq Y$
piano

$$(F, h) \quad h^2 = 6, \operatorname{div}(h) = 2$$

$$(X, \lambda) \quad \lambda^2 = 2, \operatorname{div}(\lambda) = 2 \quad \parallel \leftarrow \text{nostro teorema (!)}$$

associamo $\tau \rightsquigarrow \operatorname{Fix}(\tau) = Y \cup \tilde{Y}$

cubica
stessa!

$$g = 4$$

(F, h)

}

HK4

K3-type

$$h^2 = 2n$$

$$\text{div}(h) = 2$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 3 \pmod{4}$$

\rightsquigarrow
dualità

(X, λ)

}

HK $2n+2$

K3-type

$$\lambda^2 = 2$$

$$\text{div}(\lambda) = 2$$

\rightsquigarrow
teorema

γ

varietà di Fano, $\dim \gamma = n+1$

A livello di categorie:

Y cubica \rightsquigarrow
Kuznetsov

$$D^b Y = \langle \mathcal{D}_Y, \mathcal{Q}_Y, \mathcal{Q}_Y(1), \mathcal{Q}_Y(2) \rangle$$

- \mathcal{D}_Y categoria $K3$
- $\sigma \in \text{Stab}(\mathcal{D}_Y)$ [Bayer-Lahoz
-M-Stillman]
- $(F, h) \cong (H_0(\mathcal{H}), \ell_0)$
[Li-Pertusi-Zhao]

Ex & Motivazione 2

V_6 sp. vett. dim 6

$A \subseteq \Lambda^3 V_6$ sotto sp. Lagrangiano
($\dim A = 10$)

$\leadsto \gamma_A \subseteq \mathbb{P}V_6$, $\gamma_6 = \left\{ [v] \in \mathbb{P}V_6 : \begin{array}{l} A \xrightarrow{\varphi_v} \Lambda^2 V_6 \\ d \mapsto \sigma \wedge d \end{array} \begin{array}{l} \text{ha} \\ \text{molti} \\ \neq 0 \end{array} \right\}$

- Thm (O' grady) A generico
- Y_A | sestica singolare,
 | iphsup. $\text{sing}(Y_A) = \Sigma_A$ superficie
 liscia
 invid.

Fenetti
 Iliev-Mamivel
 (di tipo gen.)
 - $X_A \xrightarrow[\mathcal{F}]{2:1} Y_6$ ramif. su Y_A
 X_A HK liscia, proiett, $\dim = 4$
 tipo $K3$.
 - $\lambda_A = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}V_6}(1)$ ampio, $\lambda_A^2 = 2$, $\text{div}(\lambda_A) = 1$

Abbiamo: τ inv. associata a f

$$\rightsquigarrow \tau = \tau \leftarrow \text{associata a } \lambda.$$

$$\rightsquigarrow \text{Fix}(\tau) = \Sigma_A.$$

Forsetti $\rightsquigarrow \Sigma_A$ non si muove, però

$2\Sigma_A$ si muove

\rightsquigarrow covering family of
Lorenzian cycles

Idea dimostrazione del teorema principale

$$(X, \lambda) \rightsquigarrow \tau: X \xrightarrow{\sim} X \quad \tau^2 = \text{id}$$

$\lambda^2 = 2$

HK dim $2g$

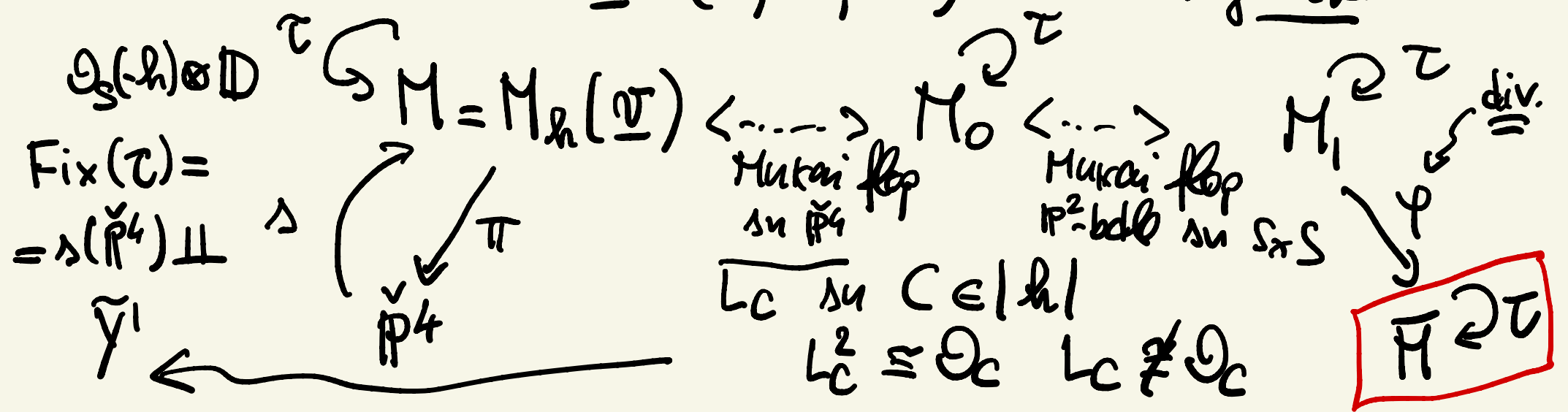
Degenerare al caso dove

X singolare

Ex γ cubic \rightsquigarrow cubica modale (A)
 \rightsquigarrow cubica determinatale (B)

(A) (C. Lehm) (S, h) $S \cong K3$, $h^2 = 6$

$\underline{v} = (0, h, -3)$ \swarrow v. general



Prop . flop non creano / distinguono
Comp. connesse di $\text{Fix}(v)$

. (\bar{M}, τ) è la specializzazione che
vogliamo.

e.g.:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \check{\mathbb{P}}^4 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^4 & \longleftarrow & \text{Bl}_S \mathbb{P}^4 & \longrightarrow & \bar{Y} \text{ cubica} \\
 & & & & \downarrow v & & \downarrow \\
 & & & & \text{LGr}(2,4) & \longrightarrow & p \text{ pt. sing.}
 \end{array}$$

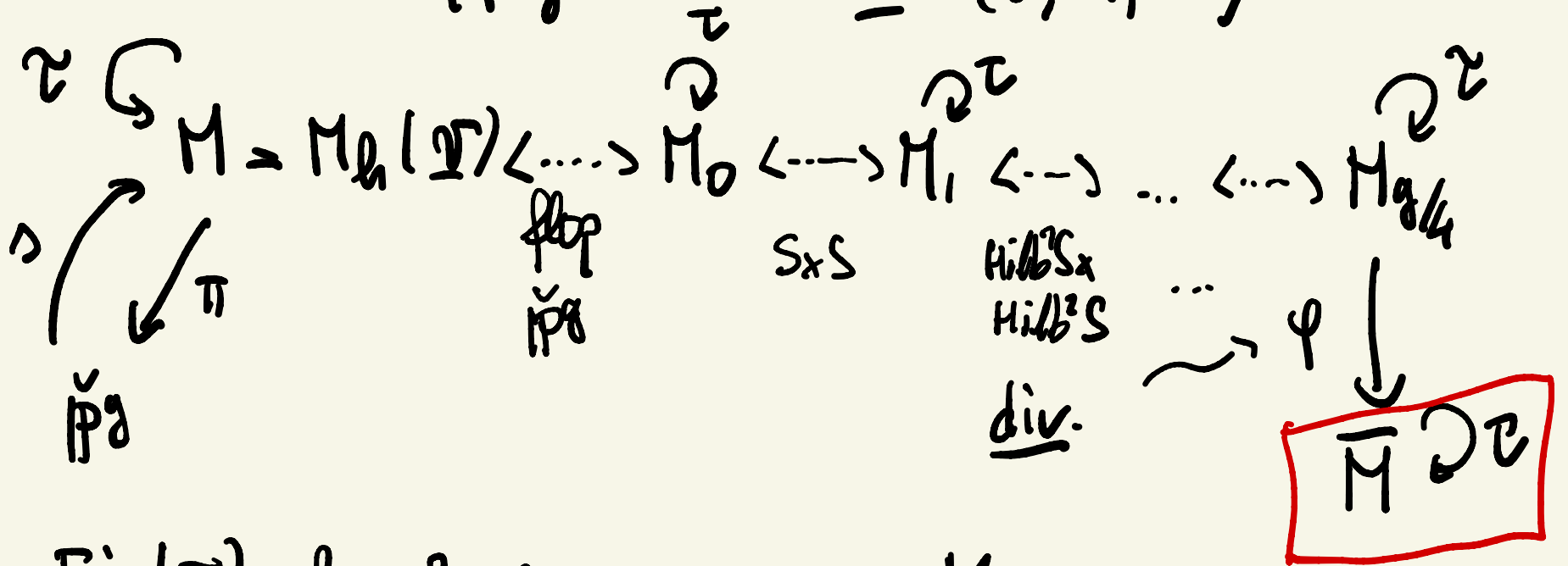
In generale:

St.1: teoria defo "con involuzione"
(caso singolare)

St.2: Studiare la specializzazione esplicitamente

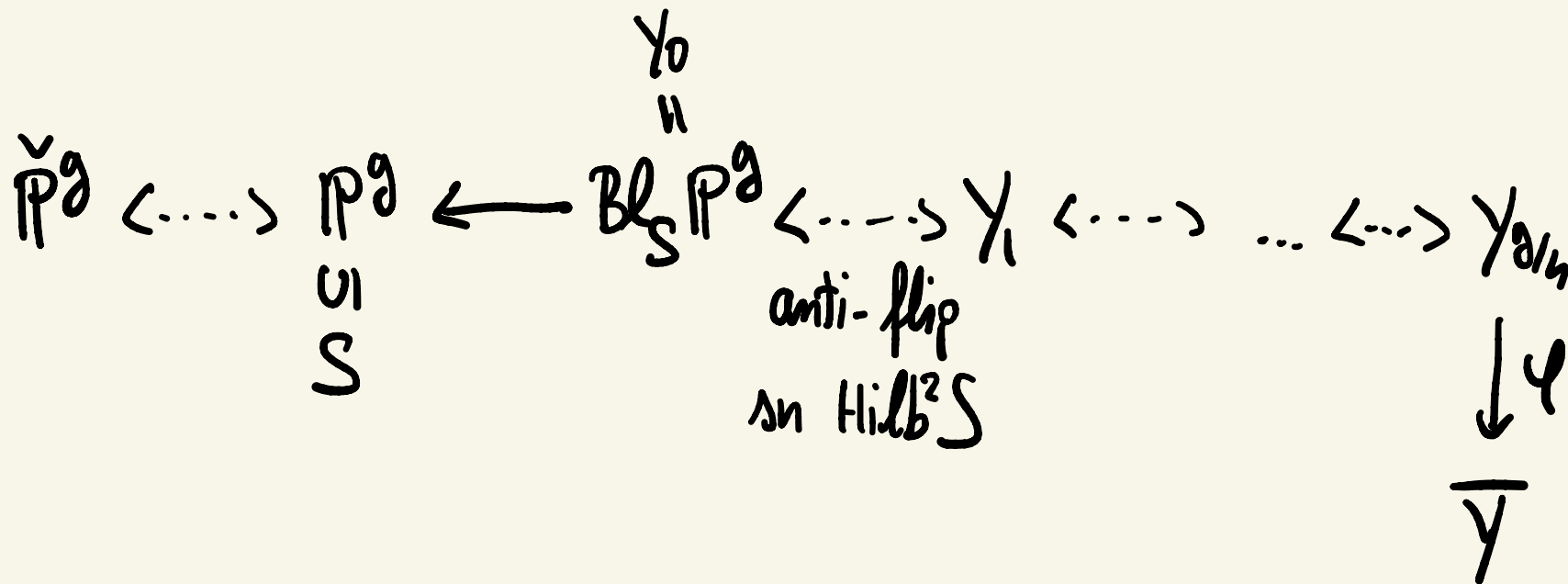
$(S, h) \quad S \cong K3, \quad h^2 = 2m \quad g = m+1$

$4 \mid g \quad \underline{v} = (0, h, -m)$



- $Fix(\tau)$ ha 2 comp. conn. su M
- tutto funziona bene come nel caso delle cubiche

• l.g.s



St. 3: Luoghi fissi in famiglia.

Comologia della comp. di Fano & categ. derivata

Com_Y Y comp. di Fano, $m = \frac{m+1}{4} = \frac{9}{4}$

$$D^b Y = \langle \mathcal{D}^{[m]}, \mathcal{O}_Y, \mathcal{D}, \mathcal{D}^{[2]}, \dots, \mathcal{D}^{[m-1]}, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_Y(1), \dots, \mathcal{D}^{[m-1]} \otimes \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2), \mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_Y(2), \dots, \mathcal{D}^{[m-1]} \otimes \mathcal{O}_Y(2) \rangle$$

K3

