# LOIS DE WEYL POUR DES POTENTIELS SINGULIERS

En collaboration avec Rupert Frank (Caltech / Munich)

<u>Cadre</u> : $(M,g)$ variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, dimension $d$

$\Delta_g$ = op de Laplace-Beltrami, a.a. sur $L^2(M, dv_g)$

Valeurs propres : $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \longrightarrow +\infty$

Vecteurs propres : $\{u_j\}$ ON dans $L^2$.

<u>Rque</u> : on peut (dans certains cas) étendre $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné

<u>Déf</u> : $N(\lambda) = \#\{j : \lambda_j \leq \lambda\} \qquad \lambda > 0$

$$N(x,\lambda) = \sum_{j : \lambda_j \leq \lambda} |u_j(x)|^2, \quad x \in M, \quad \lambda > 0.$$

<u>Rmq</u> : $\displaystyle\int_M N(x,\lambda)\, dv_g = N(\lambda)$

Lois de Weyl : "équivalent" "reste optimal"

Intégrée : $N(\lambda) = \frac{|B(0,1)|}{(2\pi)^d} \mathrm{Vol}(M) \lambda^{\frac{d}{2}} + o_{\lambda \to +\infty}(\lambda^{\frac{d}{2}})$

$o.(\lambda^{d/2})$

$\downarrow$

$O_{\lambda \to +\infty}(\lambda^{\frac{d-1}{2}})$

Ponctuelle : $N(x,\lambda) = \frac{|B(0,1)|}{(2\pi)^d} \lambda^{d/2} + o_{\lambda \to +\infty}(\lambda^{d/2})$

uniformément en $x \in M$

Weyl 1911, Carleman 1934, Minakshisundaram-Pleijel 49, Levitan 52, Avakumovic 52/56, Hörmander 68, Seeley 78-80

Question : Stabilité lois de Weyl $\Delta_g \longrightarrow \Delta_g + \underbrace{V(x)}_{\text{potentiel}}$

Réponse : si $V \in C^\infty(M)$, même résultats (Hörmander 68)
Q ! si $V$ a des singularités (potentiel Coulomb)

## Quel choix de V ?

* loi intégrée $\longrightarrow$ $\Delta_g + V$ a.a. spectre discret $\longrightarrow +\infty$
  $\longrightarrow$ V rel borné / $\Delta_g$ (au sens des formes quadratiques)

* loi ponctuelle $\longrightarrow$ fonctions propres doivent être <u>bornées</u>

Choix "naturel" : V dans la classe de Kato :

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in M} \int_{d_g(x,y)<r} \frac{|V(y)|}{d_g(x,y)^{d-2}}\, dv_g(y) = 0 . \quad \text{(Aizenman - Simon 82)}$$

<u>Exemples</u> : * $V \in L^q$ , $q > d/2$ (!) $L^{d/2}$ ne fonctionne pas

* $V(x) = \dfrac{1}{d_g(x,x_0)^\alpha}$ , $\alpha < 2$

**THM** (Frank–S) : Soit $V$ dans la classe de Kato. On suppose $d=3$.

(i) $N(x,\lambda) = \dfrac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} + o_{\lambda\to+\infty}(\lambda^{3/2})$, uniformément en $x \in M$.

(ii) On ne peut pas remplacer $o(\lambda^{3/2})$ par $O(\lambda^{3/2-\varepsilon})$. Plus précisément, pour $V(x) = \dfrac{1}{d_g(x,x_0)^{2-\eta}}$, $x_0 \in M$, $\eta \in (0,1)$, on a

$$N(x_0,\lambda) = \frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} - c_\eta \lambda^{\frac{3-\eta}{2}} + o\left(\lambda^{\frac{3-\eta}{2}}\right)$$

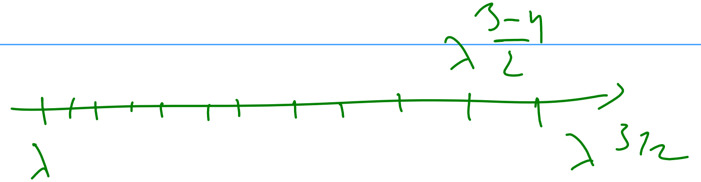
* $V \in L^q$, $q>3$
* $V(x) = \dfrac{1}{d_g(x,x_0)^\alpha}$, $\alpha<1$

(iii) Si on suppose de plus $\sup_{x\in M} \int_{d(x,y)<r} |V(y)|\, d_g(x,y)^{-2}\, dv_g(y) < +\infty$ pour un certain $r>0$,

alors $N(x,\lambda) = \dfrac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} + O(\lambda)$

(iv) On a toujours $N(\lambda) = \dfrac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2}\mathrm{Vol}(M) + O(\lambda)$, même pour $V = \underset{\text{Kato}}{V_1} + \underset{\in L^{3/2}}{V_2}$

$$N(x,\lambda) = \frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} + \lambda^{3/2} \underbrace{r(\lambda,x)}_{=\sum_{n\geq 1} r_n^{(V)}(\lambda,x)} + O(\lambda)$$



* Sogge : estimées $L^p$ de quasimodes, estimées Strichartz pour $\Delta_g + V$, V Kato

* Huang - Sogge : loi de Weyl intégrée pour $\Delta_g + V$, V Kato, d quelconque

## Lois de Weyl et théorèmes taubériens :

Idée : Ne pas étudier $N(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,\lambda]}(x)\, d\mu(x)$, $d\mu = \sum_j \delta_{\lambda_j}$

mais plutôt $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, d\mu(x)$ (transformée de Laplace) $= \mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta_g}$

théorème taubérien typique (Hardy-Littlewood) : Si $d\mu \geq 0$, alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, d\mu(x) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{A}{t^\alpha} \implies d\mu([0,\lambda]) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda^\alpha$$

Question naturelle : version avec reste ?

Oui : Freud 50s    Ophmel!

$$\left| t^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, d\mu(x) - A \right| \leq \underset{t\to 0}{r(t)} \underset{\longrightarrow 0}{} \Rightarrow \left| \lambda^\alpha d\mu([0,\lambda]) - \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \leq \frac{1}{\log \frac{1}{r(\frac{1}{\lambda})}}$$

$\longrightarrow$ il faut des restes exponentiellement petits dans $\mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta_g} \underset{t\to 0}{=} \frac{A}{t^\alpha} + O(e^{-c/t})$

$\longrightarrow$ OK si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert (Avakumovic 52)

$\longrightarrow$ FAUX sur $M$ : $\mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta_g} = \frac{A}{t^{3/2}} + \frac{B}{t} + \cdots$

Avakumovic 56 : $\mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta_g} = \frac{A}{t^{3/2}} + \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, d\mu_0(x) + O(e^{-c/t})$

"$\int_0^{+\infty} e^{-tx} d\mu(x)$"

$\longrightarrow$ Appliquer thm taubérien à $\mu - \mu_0$ ⚠ $\mu - \mu_0$ ~~positive~~

$\longrightarrow$ OK si $\mu_0([0,\lambda]) \leq O(\lambda)$

→ Ajouter $V$ dans la classe de Kato

<u>PROP</u> (Frank–S) : Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $A(t) = \underbrace{B_0(t)}_{\text{bornée}} t^{3/2} + \underbrace{B_1(t)}_{\text{croissante}} + \underbrace{B_2(t)}_{o(t)}$

On suppose :

→ * $B_0(v^2) - B_0(u^2) \geq -\frac{c}{u}$ si $0 < u \leq v \leq u+1$

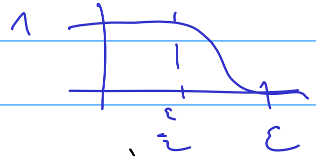
* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{A(t)}{(t+\lambda)^3}\, dt = \underset{\lambda \to +\infty}{O}\left(e^{-\varepsilon_0 \sqrt{\lambda}}\right)$ $\varepsilon_0 > 0$

transformée de Stieltjes $\frac{1}{(\Delta_g + \lambda)^2}$

Alors $A(t) = o(t)$, $t \to +\infty$

Avakumovic : $B_1(t) = N(t)$, $B_0(t) = -\frac{1}{6\pi^2}$

Asymptotiques exponentielles pour la résolvante : $V = 0$




$$G_\lambda(x,y) = (\Delta_g + \lambda)^{-1}(x,y) \quad , \quad \lambda > 0$$

Paramétrice : $$T_\lambda(x,y) = \underbrace{(-\Delta_{\mathbb{R}^3} + \lambda)^{-1}(d_g(x,y))}_{= \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, d_g(x,y)}}{4\pi\, d_g(x,y)}} \chi\left(\frac{d_g(x,y)}{\varepsilon}\right) U_0(x,y)$$

On peut choisir $U_0$ tq $$R_\lambda = (\Delta_g + \lambda)_x (T_\lambda - G_\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{\lambda}\, d_g(x,y)}}{d_g(x,y)} \varphi_0(x,y) & \text{si } d_g(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} \\ O\left(e^{-\sqrt{\lambda}\, d_g(x,y)}\right) & \text{si } d_g(x,y) > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_\lambda - G_\lambda = G_\lambda R_\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad G_\lambda = T_\lambda - G_\lambda R_\lambda = T_\lambda - T_\lambda R_\lambda + G_\lambda R_\lambda^2 = \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n T_\lambda (R_\lambda)^n$$

$$T_\lambda (R_\lambda)^n (x,y) = \int dx_1 \dots dx_n \; T_\lambda(x,x_1) \underbrace{R_\lambda(x_1,x_2)}_{O\left(e^{-\sqrt{\lambda}\, d_g(x_1,x_2)}\right)} \dots R_\lambda(x_n,y)$$

si $\exists j \; d_g(x_j, x_{j+1}) > \frac{\varepsilon}{2} \rightsquigarrow e^{-\sqrt{\lambda}\frac{\varepsilon}{2}}$

si $\forall j, \; d_g(x_j, x_{j+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \displaystyle\int \dots e^{-\sqrt{\lambda}\left(d_g(x,x_1) + d_g(x_1,x_2) + \dots + d_g(x_n,y)\right)}$ $\quad F(x, x_1, \dots, y)$

transformée de Stieltjes

Ajouter : $(\Delta_g + V + \lambda)(T_\lambda - G_\lambda) = R_\lambda + V T_\lambda$

$$\rightsquigarrow G_\lambda^V = \sum_{n \geq 0} (-1)^n T_\lambda (R_\lambda + V T_\lambda)^n \qquad \sum_{n \geq 0} (-1)^n T_\lambda (V T_\lambda)^n$$

Autres dimensions : $\displaystyle (-\Delta_{\mathbb{R}^5} + \lambda)^{-1}(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{8\pi^2 |x-y|^3}\left(1 + \sqrt{\lambda}|x-y|\right)$