

# RIGIDITÉS SPECTRALES : UN BREF ÉTAT DE L'ART

COLIN GUILLARMOU

ABSTRACT. La question de déterminer une métrique riemannienne à partir de son spectre du laplacien ou des longueurs des géodésiques périodiques est étudiée depuis longtemps, nous donnons dans ce texte un bref état de l'art sur ce sujet.

## 1. LE PROBLÈME DE KAC

Un problème classique de géométrie spectrale est de savoir à quel point le spectre des fréquences propres d'un tambour détermine sa forme. En 1966, Mark Kac publie un article intitulé *Can one hear the shape of a drum?* [Kac66] qui a influencé un certain nombre de travaux remarquables. Pour exprimer mathématiquement ce problème, faisons d'abord un bref rappel sur le spectre du laplacien d'un domaine compact.

**1.1. Le spectre du laplacien.** Supposons que  $M$  soit un domaine compact à bord lisse de  $\mathbb{R}^n$  (le tambour) et définissons l'opérateur laplacien  $\Delta_M = -\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  agissant sur l'espace  $C_0^\infty(M)$  des fonctions  $C^\infty(M)$  qui s'annulent sur le bord. On dira qu'on met la *condition de Dirichlet* au bord. L'opérateur  $\Delta_M$  est symétrique sur  $C_0^\infty(M)$  et positif au sens où pour tout  $u, v \in C_0^\infty(M)$ ,

$$\langle \Delta_M u, v \rangle_{L^2(M)} = \langle u, \Delta_M v \rangle_{L^2(M)}, \quad \langle \Delta_M u, u \rangle_{L^2(M)} = \|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 \geq 0.$$

On dira que  $\lambda \geq 0$  est une valeur propre de  $\Delta_M$  s'il existe  $u \in C_0^\infty(M)$  non identiquement nulle telle que  $(\Delta_M - \lambda)u = 0$ . Comme le domaine  $M$  est compact, il est classique en utilisant un peu d'analyse fonctionnelle (l'injection compacte de Sobolev  $H^1(M) \rightarrow L^2(M)$ ) de montrer que les valeurs propres forment un ensemble discret non borné de  $\mathbb{R}^+$  et que  $\dim \ker(\Delta_M - \lambda)$  est finie pour toute valeur propre  $\lambda$ . On notera

$$\mathrm{Sp}(\Delta_M) := \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots\} \subset (0, +\infty)$$

l'ensemble des valeurs propres ordonnées et répétées avec leur multiplicité (la dimension de  $\ker(\Delta_M - \lambda)$ ) et on l'appellera *spectre du laplacien*. Pour donner un exemple concret, qui ne rentre pas complètement dans notre cadre à cause du bord singulier, mais pour lequel la théorie marche de la même façon, on peut prendre le carré  $K = [0, 1] \times [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Les fonctions propres sont

$$u_{n,m}(x_1, x_2) = \sin(n\pi x_1) \sin(m\pi x_2)$$

avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et le spectre est

$$\mathrm{Sp}(\Delta_K) = \{\pi^2(n^2 + m^2) \mid n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dans les cas à bord lisse, l'expression des valeurs propres est en général plus compliquée : par exemple, même dans le cas du disque unité  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ , les valeurs propres de  $\Delta_D$  sont des zéros de fonctions de Bessel de premier type.

Ces fréquences propres, ou spectre de  $\Delta_M$ , apparaissent par exemple dans la solution de l'équation des ondes pour  $f \in L^2(M)$

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \Delta_M)u(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \partial_t u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

donnée par  $u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \cos(t\sqrt{\lambda_j}) \langle f, u_j \rangle_{L^2} u_j(x)$  où  $u_j$  est une base orthonormale de fonctions propres de  $\Delta_M$  associées aux valeurs propres  $\lambda_j$ . Elles peuvent aussi être vues comme des niveaux "quantiques" d'énergie, puisque le laplacien est en mécanique quantique l'opérateur qui quantifie l'énergie cinétique.

**1.2. La question de Kac.** Dans son article [Kac66], Kac s'interroge sur l'information géométrique contenue dans le spectre du laplacien. Il demande plus précisément si deux domaines *isospectraux* (i.e. ayant le même spectre du laplacien avec condition de Dirichlet)  $M_1$  et  $M_2$  sont nécessairement l'image l'un de l'autre par une isométrie euclidienne, on dit alors que les domaines sont congruents. Kac mentionne que ce problème lui avait été communiqué par Bochner dix ans plus tôt, et il écrit : *before I go any further, let me say that as far as I know the problem is still unsolved. Personally, I believe that one cannot "hear" the shape of a tambourine but I may well be wrong and I am not prepared to bet large sums either way.*

**Domaines plans spectralement déterminés.** Il existe un cas relativement simple pour lequel on peut donner un résultat positif, il s'agit du cas où  $M_1$  est un disque du plan et  $M_2$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  à bord lisse. Comme il est difficile d'obtenir des informations sur les valeurs propres individuellement, l'approche générale pour traiter ce problème est plutôt de considérer des fonctions (en particulier des séries) construites à partir des valeurs propres. Le premier exemple, qui découle d'estimées a priori sur les valeurs propres  $\lambda_j$  (par exemple en comparant au cas du carré  $K$  mentionné ci dessus) est celui de la série  $\sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_j}$ , appelée trace de l'opérateur de chaleur<sup>1</sup>, qui converge pour  $t > 0$  mais diverge en  $t \rightarrow 0^+$ . L'asymptotique de la trace de l'opérateur de chaleur a été calculée par Pleijel et Mc Kean-Singer : ils montrent que quand  $t \rightarrow 0^+$

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi t} - \frac{\ell(\partial M)}{4\sqrt{2\pi t}} + o(1/\sqrt{t})$$

où  $\text{Vol}(M)$  et  $\ell(\partial M)$  sont respectivement le volume de  $M$  et la longueur de  $\partial M$ . Par conséquent, si les deux domaines ont même spectre du laplacien, ils ont même développement asymptotique et donc leur volume et périmètre coïncident. On peut alors utiliser l'inégalité

<sup>1</sup>L'opérateur de chaleur est l'opérateur  $e^{-t\Delta_M} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} u_j \langle \cdot, u_j \rangle_{L^2}$ , il résout l'équation de chaleur au sens où  $(\partial_t + \Delta_M)e^{-t\Delta_M} = 0$  et sa trace est la somme  $\sum_j e^{-t\lambda_j}$  de ses valeurs propres.

isopérimétrique qui nous assure que  $\ell(\partial M)^2 \geq 4\pi \text{Vol}(M)$  avec égalité si et seulement si  $M$  est un disque. Ceci montre directement le résultat de rigidité suivant :

**Théorème 1.** [Kac66] *Un disque est spectralement déterminé parmi les domaines euclidiens du plan à bord lisse.*

Il existe en fait très peu d'autres exemples de domaines spectralement déterminés. Récemment, en utilisant des résultats de systèmes dynamiques sur les billards proches d'une ellipse par Avila-De Simoi-Kaloshin [ADSK16], Hezari-Zelditch ont étendu en 2019 ce résultat de Kac aux ellipses proches du disque :

**Théorème 2.** [HZ19] *Les domaines dont le bord est une ellipse avec une excentricité suffisamment petite sont spectralement déterminés parmi les domaines euclidiens à bord lisse du plan.*

Ce résultat demande beaucoup plus de technologie et de travail, il est basé cette fois sur l'étude de la trace de l'opérateur d'onde<sup>2</sup>

$$W(t) := \sum_{j=1}^{\infty} e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}. \quad (1.1)$$

Cette quantité doit en fait être considérée comme une distribution de la variable  $t \in \mathbb{R}$ , c'est à dire que la quantité qui converge est  $\langle W, \varphi \rangle := \sum_j \hat{\varphi}(\sqrt{\lambda_j})$  pour chaque  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\hat{\varphi}$  étant la transformée de Fourier de  $\varphi$ . Nous discuterons de cette distribution dans la section suivante, mais son intérêt principal réside dans le fait que ses singularités sont localisées exactement sur (la fermeture de) l'ensemble des longueurs  $\ell(\gamma)$  des orbites périodiques  $\gamma$  du flot de billard<sup>3</sup> dans le domaine  $M$ . La structure de système dynamique intégrable de l'ellipse peut alors être utilisée et l'on se ramène à une question de système dynamique.

**Domaines planaires non-spectralement déterminés.** Les premiers contre-exemples de domaines planaires isospectraux mais non congruents sont donnés en 1992 par Gordon-Webb-Wolpert :

**Théorème 3.** [GWW92] *Il existe des domaines du plan, à bord lisse par morceaux, qui ne sont pas congruents mais sont isospectraux.*

Ces domaines ne sont ni lisses ni convexes, ils sont polygonaux (cf Figure 1).

**1.3. Le problème de Kac riemannien.** Le même problème se pose naturellement pour les géométries non euclidiennes : on peut se demander si le spectre du laplacien  $\Delta_g = d^*d$  sur une variété riemannienne  $(M, g)$  compacte (avec ou sans bord) détermine la métrique à isométrie près. Rappelons qu'une métrique riemannienne  $x \mapsto g(x)$  est un champ de produits scalaires sur chaque espace tangent  $T_x M$  et que deux métriques  $g_1, g_2$  sont dites isométriques s'il existe un difféomorphisme  $\psi : M \rightarrow M$  tel que  $\psi^*g_1 = g_2$ . L'opérateur  $d$  est la dérivée extérieure sur les fonctions sur  $M$  et l'adjoint  $d^*$  est pris par rapport à la

<sup>2</sup>L'opérateur d'onde est défini par  $e^{-it\sqrt{\Delta_M}}$ , il résout l'équation d'onde au sens où  $(\partial_t^2 + \Delta_M)e^{it\sqrt{\Delta_M}} = 0$ .

<sup>3</sup>Les trajectoires du billard sont les droites avec rebond au bord suivant la loi de Snell-Descartes.

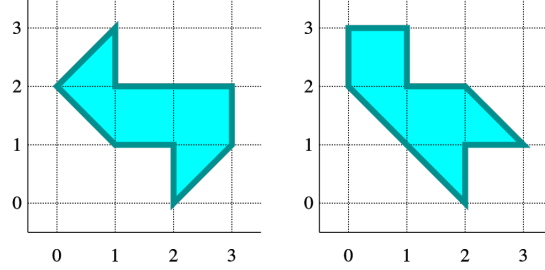


FIGURE 1. Des domaines isospectraux mais non congruents [GWW92].

mesure induite par  $g$  sur  $M$ . Dans un système de coordonnées locales  $x_1, \dots, x_n$  sur un petit ouvert simplement connexe de  $M$ , on peut écrire pour  $f \in C^\infty(M)$

$$\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{\det g_x}} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (g^{ij}(x) \sqrt{\det g(x)} \partial_{x_j} f)$$

où  $(g^{ij})_{ij}$  est la matrice inverse de  $(g_{ij} = g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}))_{ij}$ . Par exemple, sur le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de la métrique  $g_{\mathbb{R}^2} = dx_1^2 + dx_2^2$  et sur le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$  muni de la métrique  $g_{\mathbb{H}^2} = (dx_1^2 + dx_2^2)/x_2^2$ , cela donne

$$\Delta_{g_{\mathbb{R}^2}} = -\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2, \quad \Delta_{g_{\mathbb{H}^2}} = x_2^2 \Delta_{\mathbb{R}^2}.$$

Dans le cas à bord, on utilise la condition de Dirichlet mentionnée auparavant; notons que le cadre de la Section 1.2 correspond au cas particulier où les métriques sont euclidiennes<sup>4</sup>.

On dira que deux métriques sont *isospectrales* si elles ont le même spectre du laplacien (avec multiplicité), la question de Kac dans ce cadre riemannien se résume donc en

$$g_1 \text{ et } g_2 \text{ isospectrales} \iff g_1 \text{ et } g_2 \text{ isométriques} \quad ?$$

En 1964, Milnor donna l'exemple de tores euclidiens de dimension 16 qui ne sont pas isométriques mais sont isospectraux, montrant qu'en général le spectre du laplacien ne détermine pas la classe d'isométrie de la métrique. Pour les variétés à courbure négative, les premiers contre-exemples sont dus à Vignéras :

**Théorème 4.** [Vig80] *Il existe des surfaces compactes sans bord, à courbure de Gauss  $-1$ , qui ne sont pas isométriques mais sont isospectrales.*

En 1985, Sunada donne une construction générale, basée sur des revêtements, de variétés non isométriques mais isospectrales, et obtient de nouveaux exemples en dimension 2 et 4.

Pour reprendre la petite discussion de la section 1.2 de façon un peu informelle, on a construit deux fonctions/distributions à partir des  $\lambda_j$ , et leurs singularités contiennent les

<sup>4</sup>On peut aussi voir les domaines planaires euclidiens de la façon suivante: on fixe le domaine, par exemple le disque unité  $D$ , et on considère des métriques à courbures nulles sur  $D$ , de sorte qu'on se ramène à un problème d'identification de métriques plutôt que de domaines.

informations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \implies \text{Invariants géométriques locaux,}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} \implies \text{Invariants dynamiques globaux.}$$

Par invariant local on entend une quantité géométrique obtenue comme intégrale d'une fonction universelle  $F(x, g_x, \partial_x g(x), \dots, \partial_x^k g(x))$  de la métrique  $g_x$  (par exemple volume, courbure, longueur du bord etc), alors qu'un invariant global ne peut pas s'exprimer de cette façon (les orbites périodiques du billard dépendent de la géométrie globale du billard et sont en général sensibles aux petites variations du billard).

On va voir maintenant qu'une autre quantité spectrale est très utile.

**Déterminant du laplacien et compacité des métriques isospectrales.** Puisque  $\text{Sp}(\Delta_g)$  ne détermine pas en général la métrique riemannienne  $g$ , on peut se demander quelle est la structure de l'ensemble des métriques isospectrales à une métrique  $g_0$  donnée. Une réponse est donnée par Osgood-Phillips-Sarnak en 1988, suivant une première note de Melrose écrite en 1983 pour les domaines à bord :

**Théorème 5.** [OPS88] *Un ensemble de métriques riemanniennes isospectrales sur une surface  $M$  est séquentiellement compact pour la topologie  $C^\infty$  des classes d'isométrie : si  $g_n$  est une suite de métriques isospectrales sur  $M$ , alors il existe une sous-suite  $g_{n_j}$  et une suite de difféomorphismes  $\psi_{n_j}$  tels que  $\psi_{n_j}^* g_{n_j}$  converge vers une métrique  $g$  dans  $C^\infty$ .*

L'un des aspects de la preuve repose sur le fait que les invariants de la chaleur, i.e. les coefficients du développement de  $Z(t) := \sum_{\lambda_j \in \text{Sp}(\Delta_g)} e^{-\lambda_j t}$  quand  $t \rightarrow 0^+$ , contrôlent des invariants géométriques tels que le volume et les dérivées de la courbure de Gauss. Puisqu'une suite  $g_n$  de métriques isospectrales a la même fonction  $Z(t)$ , les métriques  $g_n$  ont donc toutes le même volume et les mêmes dérivées de courbure. Ceci n'implique pas complètement la compacité : en effet, à volume fixé les métriques à courbure constante  $-1$  (dites *hyperboliques*) ont tous ces invariants constants, mais ne forment pas un ensemble compact après quotient par l'action des difféomorphismes. En effet, il existe des suites de métriques hyperboliques  $(g_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  qui sont égales, sur un cylindre  $Y = (-1, 1)_x \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_\theta$  plongé dans  $M$ , à la métrique

$$g_\epsilon = \frac{dx^2}{x^2 + \epsilon^2} + (x^2 + \epsilon^2)d\theta^2, \quad (1.2)$$

elles dégénèrent donc vers une métrique singulière en  $x = 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . La dégénérescence de  $g_\epsilon$  est liée au fait que la courbe  $\gamma := \{(0, \theta) \in Y \mid \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$  non-contractile est de longueur  $\epsilon$  (pour  $g_\epsilon$ ) qui tend vers 0, et les courbes  $c_\theta := \{(x, \theta) \in Y \mid |x| < 1\}$  ont une longueur d'ordre  $2|\log \epsilon|$ . Le cylindre  $(Y, g_\epsilon)$  devient très long et très fin au milieu (voir Figure 2), ce qui empêche la convergence dans l'espace des métriques lisses sur  $M$ .

Pour traiter ce problème, Osgood-Philippis-Sarnak [OPS88] utilisent un autre invariant spectral important : le *déterminant du laplacien*  $\det \Delta_g$ . Celui ci se définit par un prolongement méromorphe de la fonction zeta spectrale  $\zeta_{\Delta_g}(s) := \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^{-s}$  de  $\operatorname{Re}(s) \gg 1$  à  $s \in \mathbb{C}$  ( $(\lambda_j)_{j \geq 2}$  étant les valeurs propres non-nulles de  $\Delta_g$ ), qui a la bonne propriété d'être analytique en  $s = 0$ , puis en posant

$$\det \Delta_g := \exp(-\partial_s \zeta_{\Delta_g}(s)|_{s=0}).$$

Notons qu'il s'agit d'une régularisation du produit infini  $\prod_{j=2}^{\infty} \lambda_j$  des valeurs propres non nulles de  $\Delta_g$ . Il s'agit d'un invariant de type global, mais qui a une variation conforme locale (voir la formule (1.4)). Regardons par exemple les surfaces de genre  $\geq 2$ . Le théorème d'uniformisation de Poincaré nous dit que pour chaque métrique  $g$  sur une surface  $M$  de genre  $\geq 2$ , il existe une unique métrique  $h$  à courbure de Gauss constante  $-1$  et  $\omega \in C^\infty(M)$  tels que  $g = e^\omega h$ , de plus la courbure de Gauss  $K_g$  de  $g$  s'exprime sous la forme

$$K_{e^\omega h} = e^{-\omega} \left( \frac{1}{2} \Delta_h \omega - 1 \right). \quad (1.3)$$

Le déterminant  $\det \Delta_g$  est relié d'une manière simple à  $\det(\Delta_h)$  via la formule dite "de Polyakov"<sup>5</sup>

$$\det \Delta_{e^\omega h} = \det \Delta_h \frac{\operatorname{Vol}(M, g)}{\operatorname{Vol}(M, h)} \exp \left( -\frac{1}{48\pi} \int_M (|\nabla \omega|_h^2 - 4\omega) dv_h \right). \quad (1.4)$$

L'idée est de montrer que  $\det(\Delta_{e^\omega h})$  contrôle la *systole* de  $h$ , i.e. la longueur de la courbe<sup>6</sup> fermée non-contractile la plus courte sur  $(M, h)$ , ce qui permettra d'éviter le problème mentionné au dessus. Les métriques isospectrales ayant le même volume, on peut commencer par étudier  $\omega \mapsto \det \Delta_{e^\omega h}$  à volume fixé  $\operatorname{Vol}(M, e^\omega h) = \operatorname{Vol}(M, h)$ , et en particulier chercher ses extrema. Parmi les métriques  $g = e^\omega h$  dont le volume  $\operatorname{Vol}(M, g) = \int_M e^\omega dv_h$  est égal à  $\operatorname{Vol}(M, h)$ , on a en dérivant (1.4) par rapport à  $\omega$  que  $\omega_0$  est un point critique de  $\omega \mapsto \det \Delta_{e^\omega h}$  si et seulement si

$$\int_M (2\Delta_h \omega_0 - 4)u dv_h = 0, \quad \forall u \in C^\infty(M) \text{ telle que } \int_M u e^{\omega_0} dv_h = 0,$$

ce qui signifie que  $2\Delta_h \omega_0 - 4 = \lambda e^{\omega_0}$  pour un  $\lambda \in \mathbb{R}$  et donc que  $K_{e^{\omega_0} h}$  est constante en utilisant (1.3). Ceci force donc  $\omega_0 = 0$  et on peut montrer que la fonctionnelle  $\omega \mapsto \det(\Delta_{e^\omega h})$  avec condition  $\operatorname{Vol}(M, e^\omega h) = \operatorname{Vol}(M, h)$  est maximale en son point critique 0 :

$$\det \Delta_h \geq \det \Delta_{e^\omega h}. \quad (1.5)$$

Ceci implique que si  $g_n$  est une suite de métriques isospectrales, que l'on peut écrire (par uniformisation)  $g_n = e^{\omega_n} h_n$  avec  $h_n$  hyperbolique et  $\omega_n \in C^\infty(M)$ , alors

$$\forall n \geq 1, \quad \det \Delta_{g_1} = \det \Delta_{g_n} \leq \det \Delta_{h_n}$$

<sup>5</sup>On remarquera que si  $\omega$  est constante, le changement est non trivial :  $\det \Delta_{e^\omega h} / \det \Delta_h = e^{\omega(1 - \frac{\chi(M)}{6})}$  en utilisant Gauss-Bonnet pour relier  $\operatorname{Vol}_h(M)$  à la caractéristique d'Euler  $\chi(M)$ .

<sup>6</sup>Cette courbe est nécessairement une géodésique, i.e. une courbe minimisant localement la fonctionnelle longueur associée à la métrique (cf Section 2 pour la notion de géodésique).

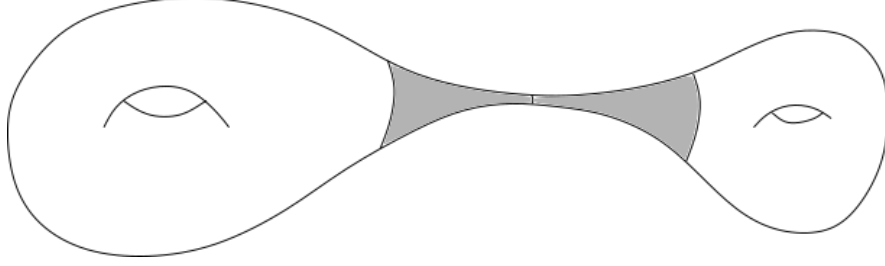


FIGURE 2. Une métrique hyperbolique (à courbure  $-1$ ) avec un cylindre  $Y$  (en gris) muni de la métrique (1.2); la courbe au milieu est de longueur  $\epsilon$  et le diamètre du cylindre est d'ordre  $2|\log \epsilon|$ .

et on a donc une suite de métriques hyperboliques  $h_n$  dont le déterminant est borné inférieurement. Pour les métriques hyperboliques  $h_n$ , la formule de Selberg (voir Section 2) relie le spectre de  $\Delta_{h_n}$ , et donc son déterminant, aux longueurs des géodésiques périodiques de  $h_n$  et en particulier à la systole de  $h_n$ . Ceci a permis à Wolpert de montrer que  $\det(\Delta_{h_n}) \leq C(M)e^{-\frac{c(M)}{\ell_0(h_n)}}$  pour des constantes  $c(M), C(M)$  ne dépendant que de  $M$  et où  $\ell_0(h_n)$  est la systole de  $h_n$  : on obtient donc, pour une suite de métriques isospectrales  $g_n = e^{\omega_n} h_n$ , que la systole  $\ell_0(h_n)$  de  $h_n$  est bornée inférieurement par la constante positive uniforme  $c(M)/|\log(\det \Delta_{g_n}/C(M))|$ . Cela permet d'éviter la dégénérescence évoquée en (1.2). Plus précisément, les régions de l'espace des modules (i.e. l'espace des métriques hyperboliques modulo difféomorphismes sur  $M$ ) avec systole  $\ell_0(h) > \epsilon > 0$  sont compactes, on peut donc extraire une sous-suite de métriques  $h_{n_j}$  et de difféomorphismes  $\psi_j$  sur  $M$  tels que  $\psi_j^* h_{n_j}$  converge dans  $C^\infty$  vers une métrique hyperbolique. Le fait que les dérivées de la courbure  $K_{g_n}$  soient toutes bornées indépendamment de  $n$  permet d'extraire une sous-suite de  $\omega_{n_j}$  qui converge dans  $C^\infty$  si  $g_n = e^{\omega_n} h_n$  (rappelons la formule (1.3) reliant courbure  $K_{g_n}$  à  $\omega_n$ ), d'où la compacité du Théorème 5.

**Conjectures, rigidité locale.** Dans [OPS88], les auteurs conjecturent que pour les métriques à courbure négative<sup>7</sup>, un résultat plus fort que la compacité devrait même être vrai :

**Conjecture 1.** [OPS88] *L'ensemble des classes d'isométrie de métriques à courbure négative ayant le même spectre du laplacien qu'une métrique  $g_0$  fixée à courbure négative est un ensemble fini.*

Une approche possible, en dimension 2 en utilisant la compacité mentionnée ci-dessus, serait de montrer la conjecture suivante:

**Conjecture 2** (Rigidité locale de  $\text{Sp}(\Delta_g)$ ). *Si  $(M, g_0)$  est une variété compacte sans bord à courbure négative, il existe un voisinage  $V$  de la classe d'isométrie de  $g_0$  pour la topologie  $C^\infty$  tel que pour toute métrique  $g$  dans  $V$ ,  $\text{Sp}(\Delta_g) = \text{Sp}(\Delta_{g_0})$  si et seulement si  $g$  et  $g_0$  sont isométriques.*

<sup>7</sup>Par négative, on entend strictement négative.



Autrement dit, le spectre du laplacien devrait déterminer la métrique à isométrie près parmi les métriques qui lui sont proches. Notons que cela ne contredit pas les contre-exemples de Vignéras, qui ne sont pas des métriques proches l'une de l'autre.

## 2. SPECTRE DES LONGUEURS

Après avoir parlé de spectre du laplacien  $\Delta_g$  sur les variétés riemanniennes  $(M, g)$ , nous abordons une autre notion de spectre qui lui est liée de façon intrigante et hautement non triviale : il s'agit du spectre des longueurs, défini comme l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de  $(M, g)$ . Commençons par rappeler que les géodésiques d'une métrique riemannienne  $g$  sont les courbes qui minimisent localement la fonctionnelle longueur (3.1) parmi les courbes  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  de classe  $C^1$  à extrémités fixées; elles sont solutions d'équations différentielles d'ordre 2 avec données initiales  $(\gamma(0), \partial_t \gamma(0))$ . On dit que  $\gamma$  est une géodésique périodique si  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  est  $C^1$  et son image est une géodésique. Par exemple un méridien sur la sphère ronde canonique  $\mathbb{S}^2$  et la courbe horizontale  $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  sur le tore euclidien sont des géodésiques périodiques. En courbure négative, l'ensemble des géodésiques périodiques est dénombrable et l'ensemble de leurs longueurs est discret dans  $\mathbb{R}^+$ .

**Courbure constante négative.** En courbure constante  $-1$ , sur une surface compacte de genre  $\geq 2$ , la formule de trace de Selberg s'écrit de la façon suivante : soit  $f$  une fonction holomorphe dans une bande  $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < 1/2 + \epsilon\}$  (pour un  $\epsilon > 0$ ) contenant l'axe réel, satisfaisant  $f(-z) = f(z)$  et une estimée de la forme  $|f(z)| = \mathcal{O}((1 + |z|)^{-2-\delta})$  pour un  $\delta > 0$ , alors

$$\sum_{\lambda_j \in \operatorname{Sp}(\Delta_g)} f(\sqrt{\lambda_j - 1/4}) = \frac{\operatorname{Vol}(M)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \tanh(\pi t) t dt + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh(k\ell(\gamma)/2)} \hat{f}(k\ell(\gamma))$$

où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des géodésiques périodiques primitives<sup>8</sup>,  $\ell(\gamma)$  leurs longueurs et  $\hat{f}$  la transformée de Fourier de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Ceci implique que  $\operatorname{Sp}(\Delta_g)$  détermine l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques

$$\operatorname{LS}(g) := \{\ell_g(\gamma) \mid \gamma \text{ géodésique périodique de } g\},$$

que l'on appelle *spectre des longueurs* de  $g$ .

**Courbure négative variable.** De manière plus générale, pour une variété à courbure négative variable, les travaux de Colin de Verdière (1973), Chazarain (1974) et Duistermaat-Guillemin (1975)<sup>9</sup> montrent que la trace des ondes  $W(t) = \sum_j e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}$  est

<sup>8</sup>On dit que  $\gamma$  est primitive si elle ne peut pas s'écrire comme une géodésique périodique parcourue plus d'une fois.

<sup>9</sup>Des résultats similaires avaient été obtenus auparavant dans la littérature physique pour les domaines planaires par Balian-Bloch.



une distribution de la variable  $t \in \mathbb{R}$  avec support singulier (i.e. là où elle n'est pas  $C^\infty$ ) est

$$\text{Singsupp}(W) \subset \{0\} \cup \text{LS}(g).$$

De plus, la singularité de  $W(t)$  en  $t = T \in \text{LS}(g)$  est donnée par<sup>10</sup>

$$W(t) \sim \frac{1}{t - T} \sum_{(\gamma, k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}, k\ell(\gamma) = T} \frac{\ell(\gamma)}{2\pi |\det(1 - P_\gamma^k)|^{1/2}}$$

avec  $P_\gamma$  l'application de Poincaré (premier retour) du flot géodésique linéarisé en  $\gamma$ . De façon heuristique, la présence des  $\ell(\gamma)$  comme singularités de  $W(t)$  est liée au fait que les singularités des solutions de l'équation des ondes suivent les géodésiques et que  $W(t)$  peut se voir comme l'intégrale  $\int_M E(t; x, x) dv_g(x)$  du noyau intégral  $E(t; x, x')$  de l'opérateur d'onde au temps  $t$  sur la diagonale. Ce résultat sur  $W(t)$  implique que  $\text{Sp}(\Delta_g)$  détermine  $\text{LS}(g)$  en courbure négative, du moins si l'on considère  $\text{LS}(g)$  sans prendre en compte la multiplicité<sup>11</sup>. Notons que les métriques pour lesquelles la multiplicité des longueurs des géodésiques périodiques est triviale sont génériques parmi les métriques à courbure négative.

Les contre-exemples de Vignéras et Sunada ont aussi les mêmes spectres de longueurs. Cependant, tout comme pour la conjecture 2, il est naturel de postuler la

**Conjecture 3** (Rigidité locale de  $\text{LS}(g)$ ). *Si  $(M, g_0)$  est une variété compacte sans bord à courbure négative, il existe un voisinage  $V$  de la classe d'isométrie de  $g_0$  pour la topologie  $C^\infty$  tel que pour toute métrique  $g$  dans  $V$ ,  $\text{LS}(g) = \text{LS}(g_0)$  (avec multiplicité) si et seulement si  $g$  et  $g_0$  sont isométriques.*

### 3. SPECTRE MARQUÉ DES LONGUEURS

La difficulté dans l'étude du spectre des longueurs est qu'il ne donne pas vraiment d'informations sur la façon dont les géodésiques de  $M$  sont réparties sur  $M$ . Cette répartition est encodée dans une application appelée *flot géodésique* que l'on introduit ci après, et qui est liée de près à la métrique  $g$ . Pour obtenir une information sur le flot géodésique à partir des longueurs de géodésiques périodiques, il nous faut également ajouter une information supplémentaire de type topologique pour chaque géodésique périodique : sa classe d'homotopie libre. Rappelons que deux courbes fermées  $c_0(t), c_1(t)$  ( $t \in [0, 1]$ ) sont librement homotopes s'il existe une déformation continue  $(s, t) \mapsto \gamma(s, t)$  telle que  $\gamma(0, t) = c_0(t)$  et  $\gamma(1, t) = c_1(t)$ . En courbure négative, pour toute classe  $c$  d'homotopie libre il existe une unique géodésique  $\gamma_c$  dans la classe  $c$ , qui est obtenue en minimisant la fonctionnelle longueur (on notera  $\dot{\gamma}(t) := \partial_t \gamma(t)$ )

$$\gamma \in c \mapsto \ell_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \quad (3.1)$$

<sup>10</sup>On pourra comparer avec la formule de Selberg, qui calcule explicitement  $\text{Tr}(e^{-i\sqrt{\Delta-1/4}})$  plutôt que  $\text{Tr}(e^{-i\sqrt{\Delta}})$ . On y observe les singularités aux longueurs  $\ell(\gamma)$  des géodésiques périodiques.

<sup>11</sup>La multiplicité de  $\gamma$  est le nombre de géodésique périodiques avec longueur  $\ell_g(\gamma)$ .

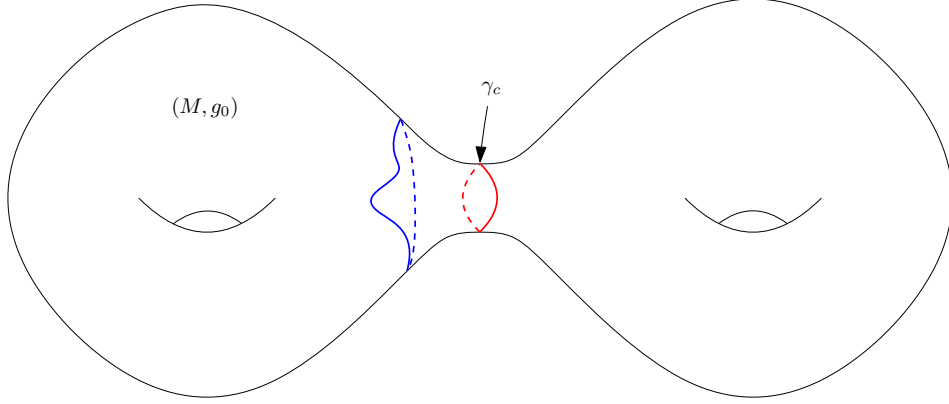


FIGURE 3. Une surface de genre 2. La classe d'homotopie libre  $c$  des courbes ne s'enroulant qu'une unique fois autour de la partie centrale contient une unique géodésique périodique  $\gamma_c$  (en rouge).

sur les courbes  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  de classe  $C^1$  dont l'image appartient à  $c$ . Par exemple sur la figure 3, la courbe bleue et la courbe rouge sont librement homotopes, et la rouge est la géodésique  $\gamma_c$  dans la classe d'homotopie libre  $c$ . Une façon de trouver cette géodésique  $\gamma_c$  est de déformer la courbe bleue par le flot de gradient de la fonctionnelle  $\gamma \in c \mapsto \ell_g(\gamma)$ . La courbure négative est importante pour l'unicité de  $\gamma_c$  : on voit sur l'exemple du tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  muni de la métrique euclidienne  $dx_1^2 + dx_2^2$  (à courbure nulle) que les segments verticaux  $c_s(t) = (s, t)$  pour  $t \in [0, 1]$  sont des géodésiques librement homotopes si  $s \in [0, 1]$ .

L'existence et unicité de  $\gamma_c$  nous permet de définir le *spectre marqué des longueurs*.

**Définition 3.1.** Le spectre marqué des longueurs de  $(M, g)$  est l'application

$$L_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad L_g(c) = \ell_g(\gamma_c)$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des classes d'homotopie libre de  $M$ . On peut noter que  $L_{\psi^*g} = L_g$  si  $\psi$  est un difféomorphisme isotope à l'identité. De plus,  $L_g$  dépend de façon lisse de  $g$ .

Comme le spectre des longueurs  $LS(g)$  ne détermine pas  $g$  à isométrie près (dans le Théorème 4 les contre-exemples ont le même LS), une question sans doute plus naturelle et raisonnable a été posée dans un article de Burns et Katok de 1985 :

**Conjecture 4.** [BK85] *Soit  $(M, g_0)$  une variété compacte sans bord à courbure négative. Si  $g$  est une autre métrique à courbure négative telle que  $L_g = L_{g_0}$ , alors  $g$  et  $g_0$  sont isométriques.*

Notons que la résolution de cette conjecture n'impliquerait pas de résultats directement sur le problème d'isospectralité posé par Kac car  $\text{Sp}(\Delta_g)$  ne détermine a priori pas  $L_g$  : en effet,  $\text{Sp}(\Delta_g)$  ne détermine que l'image  $L_g(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^+$  de  $L_g$  par l'étude des singularités de la trace des ondes  $W(t)$  en Section 2.

Nous allons maintenant interpréter l'égalité des spectres marqués de deux métriques en terme de propriétés de leur flot géodésique. Sur le fibré unitaire  $S_g M := \{(x, v) \in$

$TM \mid g_x(v, v) = 1\}$ , l'application  $\varphi_t^g : (x, v) \in S_g M \mapsto (\gamma_{x,v}(t), \dot{\gamma}_{x,v}(t)) \in S_g M$  définit un flot que l'on appelle *flot géodésique*, où  $\gamma_{x,v}(t)$  est l'unique géodésique avec conditions initiales  $\gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = v$ . Le fibré unitaire est feuilleté par les lignes de flot, qui sont des géodésiques relevées. Il s'avère que deux métriques riemanniennes  $g_1, g_2$  à courbure négative ont leurs flots géodésiques  $\varphi_t^{g_1}, \varphi_t^{g_2}$  topologiquement conjugués (voir par exemple Hamenstadt [Ham99]), au sens où il existe un *homéomorphisme* (non unique)  $\psi : S_{g_1} M \rightarrow S_{g_2} M$  qui envoie les géodésiques de  $g_1$  sur celles de  $g_2$ . La configuration topologique des géodésiques relevées est donc globalement la même pour  $g_1$  et  $g_2$ . Il y a cependant a priori une distorsion (un étirement géodésique)  $\kappa \in C^0(S_{g_1} M, \mathbb{R}^+)$  entre les deux

$$\varphi_{\kappa(y,t)}^{g_2}(\psi(y)) = \psi(\varphi_t^{g_1}(y)), \quad y = (x, v) \in S_{g_1} M.$$

Donc si  $L_{g_1} = L_{g_2}$ , on obtient que

$$\kappa(y, \ell_{g_1}(\gamma)) = \kappa(y, 0) + \ell_{g_1}(\gamma) \tag{3.2}$$

pour chaque géodésique périodique  $\gamma$  de  $g_1$  et  $y \in \text{Im}(\gamma, \dot{\gamma}) \subset S_{g_1} M$ . On remarque que n'importe quelle fonction de la forme  $\kappa(y, t) = t + f(\varphi_t^{g_1}(y)) - f(y)$  pour  $f \in C^0(S_{g_1} M)$  vérifie (3.2). Le théorème de Livsic dit précisément la réciproque, i.e.  $\kappa(y, t) = t + f(\varphi_t^{g_1}(y)) - f(y)$  pour une fonction  $f$  hœlderienne. Cela utilise le fait que les géodésiques périodiques en courbure négative sont denses dans le fibré unitaire. En changeant  $\psi$  en  $\tilde{\psi}(y) := \varphi_{-f(y)}^{g_1}(\psi(y))$ , on obtient  $\varphi_t^{g_2}(\tilde{\psi}(y)) = \tilde{\psi}(\varphi_t^{g_1}(y))$  et on dit dans ce cas que les flots  $\varphi_t^{g_1}, \varphi_t^{g_2}$  sont *conjugués* par  $\tilde{\psi}$ . Réciproquement, si les flots sont conjugués, alors on voit facilement que  $L_{g_1} = L_{g_2}$ , on a donc équivalence

$$\varphi_t^{g_1} \text{ conjugué à } \varphi_t^{g_2} \iff L_{g_1} = L_{g_2}.$$

La conjecture de Burns-Katok peut donc se formuler sous la forme suivante : deux métriques à courbure négative dont les flots géodésiques sont conjugués sont-elles isométriques ?

**Rigidité du spectre marqué.** Cette conjecture de Burns-Katok est toujours ouverte en dimension  $n > 2$ , mais elle a été résolue par Otal et Croke en 1990 en dimension 2.

**Théorème 6.** [Ota90, Cro90] *Une surface compacte sans bord à courbure négative est déterminée, à isométrie près, par son spectre marqué des longueurs.*

Otal donne en particulier une construction de l'isométrie entre  $g_1$  et  $g_2$  avec même spectre marqué à partir de la conjugaison des flots, par des méthodes d'intersection de mesures et le théorème de Gauss-Bonnet. Auparavant, Guillemin-Kazhdan [GK80] avaient montré en dimension 2 une version infinitésimale de ce résultat : il n'y a pas de familles lisses  $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$  de métriques à courbure négative ayant le même spectre marqué, hormis les déformations isométriques. L'idée est de différencier  $L_{g^s}(c)$  pour une classe  $c \in \mathcal{C}$  fixée : si  $\gamma_s(t)$  est la

géodésique pour  $g^s$  de classe  $c$  et  $g' = \partial_s g^s|_{s=0}$ , alors

$$\begin{aligned} 0 = \partial_s L_{g^s}(c)|_{s=0} &= \partial_s \left( \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma_s^s(t)}^s(\dot{\gamma}_s(t), \dot{\gamma}_s(t))} dt \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{g'_{\gamma_0(t)}(\dot{\gamma}_0(t), \dot{\gamma}_0(t))}{\sqrt{g_{\gamma_0(t)}^0(\dot{\gamma}_0(t), \dot{\gamma}_0(t))}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell(\gamma_0)} g'_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

où l'on a d'abord utilisé que  $\gamma_0$  est un point critique de (3.1) pour  $g_0$  puis on a fait un changement de variable de sorte que  $\alpha(t)$  soit la géodésique  $\gamma_0$  paramétrée par longueur d'arc. L'identité (3.3) dit que la fonction  $f : (x, v) \mapsto g'_x(v, v)$  représentant la variation de  $g^s$  sur  $S_{g^0}M$  est donc d'intégrale nulle sur chaque géodésique périodique de  $g^0$ . Une application du théorème de Livsic et des identités intégrales faisant intervenir la courbure permettent à Guillemin-Kazhdan de conclure que  $g' = \mathcal{L}_V g^0$ , avec  $V$  un champ de vecteurs sur  $M$  et  $\mathcal{L}_V$  la dérivée de Lie dans la direction de  $V$ . En utilisant cet argument de linéarisation en tout  $s$ , on obtient un champ de vecteur  $V_s$  dépendant du temps tel que  $\partial_s g^s = \mathcal{L}_{V_s} g^s$  et on peut intégrer cette identité en  $g^s = \psi_s^* g^0$  où  $\psi_s$  est la famille de difféomorphismes qui intègre  $V_s$ . Ce résultat infinitésimal a été généralisé par Croke-Sharafutdinov [CS98] en dimension quelconque. En dimension  $n \geq 2$ , Katok [Kat88] a aussi démontré que deux métriques conformes  $g_2 = e^w g_1$  (pour  $w \in C^\infty$ ) à courbure négative ont même spectre marqué si et seulement si  $g_1 = g_2$ . Enfin Hamenstädt [Ham99] a utilisé les résultats de rigidité entropique des espaces localement symétriques de Besson-Courtois-Gallot pour obtenir le

**Théorème 7.** [Ham99] *Si  $(M, g_0)$  est un espace localement symétrique compact à courbure négative, alors si  $g$  est une métrique à courbure négative sur  $M$  telle que  $L_g = L_{g_0}$ , nécessairement  $g$  est isométrique à  $g_0$ .*

Récemment, avec Thibault Lefeuvre, nous avons montré un résultat de rigidité locale en toute dimension, qui répond "localement" à la conjecture de Burns-Katok.

**Théorème 8.** [GL19, GKL19] *Si  $(M, g_0)$  est une variété compacte sans bord à courbure négative, il existe  $k \in \mathbb{N}$  dépendant de  $\dim M$  seulement et  $\epsilon > 0$  tels que, pour toute métrique  $g$  satisfaisant  $\|g - g_0\|_{C^k} < \epsilon$ , si  $L_g = L_{g_0}$  alors  $g$  est isométrique à  $g_0$ . Plus précisément, si  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des classes d'homotopie libre, il existe  $C > 0$  tel que pour chaque  $g$  vérifiant  $\|g - g_0\|_{C^k} < \epsilon$ , il existe un difféomorphisme  $\psi$  de  $M$  tel que*

$$\|\psi^* g - g_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(M)} \leq C \left( \sup_{c \in \mathcal{C}} \left| \frac{L_g(c)}{L_{g_0}(c)} - 1 \right| \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

Les constantes  $C, \epsilon$  sont localement uniformes en  $g_0$ , l'espace  $H^{-\frac{1}{2}}(M)$  est l'espace de Sobolev d'ordre  $-1/2$  dont la norme est construite en utilisant  $g_0$ . Une estimée du même type est aussi obtenue (par interpolation) en remplaçant  $H^{-\frac{1}{2}}(M)$  par  $C^\alpha(M)$  pour  $\alpha < k$ , mais où la puissance du membre de droite est un  $\beta \in (0, 1/2)$  qui dépend de  $\alpha$  et  $k$ .

La démonstration se décompose en cinq étapes.

1) *La jauge.* D'abord, on choisit une bonne jauge pour éviter le problème d'invariance par l'action des difféomorphismes sur les métriques : on montre par un théorème de fonction implicite que pour chaque  $g$  près de  $g_0$  (en norme  $C^k$  avec  $k$  fixé assez grand), il existe un unique difféomorphisme  $\psi : M \rightarrow M$  proche de l'identité (en norme  $C^{k+1}$ ) tel que

$$\delta_{g_0}(\psi^*g - g_0) = 0$$

où  $\delta_{g_0}$  est l'opérateur de divergence sur les tenseurs symétriques défini par la formule  $\delta_{g_0}h := -\text{Tr}(\nabla^{g_0}h)$ . Cela signifie que localement près de  $g_0$ , on représente les classes d'isométries comme l'espace vectoriel  $\ker \delta_{g_0}$  des tenseurs à divergence nulle.

2) *Développement de Taylor de  $\mathcal{L}$ .* Dans un deuxième temps on fait un développement de Taylor à l'ordre 1 de l'application<sup>12</sup>

$$\mathcal{L} : g \in \text{Met}(M) \mapsto \frac{Lg}{L_{g_0}} \in \ell^\infty(\mathcal{C}),$$

qui est  $C^\infty$ , et on obtient, avec  $g' := \psi^*g$ ,

$$\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g') = \mathcal{L}(g_0) + d\mathcal{L}_{g_0}(g' - g_0) + \mathcal{O}(\|g' - g_0\|_{C^5}^2) \quad (3.5)$$

où  $d\mathcal{L}_{g_0}$  est la différentielle de  $\mathcal{L}$  en  $g_0$ . Comme on l'a vu via le calcul simple (3.3), on a pour  $h$  un 2-tenseur symétrique

$$\forall c \in \mathcal{C}, \quad (d\mathcal{L}_{g_0}h)(c) = \frac{1}{2L_{g_0}(c)} \int_0^{L_{g_0}(c)} h_{\gamma_0(t)}(\dot{\gamma}_0(t), \dot{\gamma}_0(t)) dt$$

avec  $\gamma_0(t)$  la géodésique de  $g_0$  dans la classe d'homotopie libre  $c$ . Pour montrer l'injectivité locale de  $\mathcal{L}$  près de  $g = g_0$ , on aimerait utiliser un théorème d'inversion locale, et comme l'espace  $\text{Met}(M)$  des métriques sur  $M$  est de dimension infinie, il nous faut une estimée quantitative de l'injectivité du linéarisé  $d\mathcal{L}_{g_0}$ .

3) *L'opérateur de variance.* Pour cela on va introduire un opérateur de variance, qui on le verra plus tard, est lié à  $d\mathcal{L}_{g_0}$ . On remarque d'abord que les 2-tenseurs symétriques lisses, dont l'espace est noté  $C^\infty(M; S^2(T^*M))$ , peuvent se voir comme des fonctions sur  $S_{g_0}M$  par l'application  $\pi_2^* : C^\infty(M; S^2(T^*M)) \rightarrow C^\infty(S_{g_0}M)$  définie par  $(\pi_2^*h)(x, v) := h_x(v, v)$  si  $h \in C^\infty(M; S^2(T^*M))$ . On définit alors l'opérateur dit *de variance*<sup>13</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi : C^\infty(S_{g_0}M) \rightarrow C^{-\infty}(S_{g_0}M) \\ \langle \Pi u, v \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \int_{S_{g_0}M} u(\varphi_t^{g_0}(y)) v(y) d\mu(y) dt \end{array} \right. ,$$

où  $d\mu$  est la mesure de Liouville, une mesure naturelle de type Lebesgue sur  $S_{g_0}M$ , invariante par le flot géodésique  $\varphi_t^{g_0}$ , et où l'on a supposé aussi  $\int_{S_{g_0}M} u d\mu = 0$ . La limite  $T \rightarrow \infty$  existe grâce à la propriété de mélange du flot, qui est une conséquence de la courbure négative. On montre par des outils d'analyse microlocale et la théorie des espaces de Sobolev anisotropes que c'est un opérateur borné  $\Pi : H^s(S_{g_0}M) \rightarrow H^{-s}(S_{g_0}M)$  sur des espaces de Sobolev pour tout  $s > 0$ , et que  $\Pi X_{g_0} = X_{g_0} \Pi = 0$  si  $X_{g_0} = \partial_t \varphi_t^{g_0}|_{t=0}$  est le

<sup>12</sup>On peut remarquer que cette application est bornée en utilisant que  $C^{-1}g_0 \leq g \leq Cg_0$  sur  $M$  pour un  $C > 0$  uniforme, et le fait que la géodésique dans  $c$  est le minimiseur de la fonctionnelle longueur.

<sup>13</sup> $C^{-\infty}(S_{g_0}M)$  est l'espace des distributions sur  $S_{g_0}M$ .

champ de vecteur du flot géodésique. D'autre part on montre que, si  $\Pi_2$  est défini sur les 2-tenseurs symétriques sur  $M$  par

$$\langle \Pi_2 h, h' \rangle := \int_{S_{g_0} M} (\Pi \pi_2^* h) \cdot \pi_2^* h' d\mu$$

alors  $\Pi_2$  est un opérateur non-local sur  $M$  (pseudo-différentiel d'ordre  $-1$ ) elliptique sur le sous-espace<sup>14</sup>  $E = \{h \in C^\infty(M; S^2(T^*M)) \mid \delta_{g_0} h = 0, \int_{S_{g_0} M} \pi_2^* h d\mu = 0\}$  au sens où l'on a les estimées suivantes : pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , il existe  $C_1 > 0$  qui ne dépend que de  $g_0$  tel que pour tout  $h \in E$

$$\|\Pi_2 h\|_{H^s(M)} \geq C_1 \|h\|_{H^{s-1}(M)} \quad (3.6)$$

où  $H^s(M)$  est l'espace de Sobolev d'ordre  $s$  sur les 2-tenseurs symétriques. Cet opérateur  $\Pi_2$  ressemble à une puissance  $\Delta_{g_0}^{-1/2}$  du Laplacien sur les tenseurs à divergence nulle. Cette estimée elliptique va servir en quelque sorte à montrer une injectivité "quantitative" de  $d\mathcal{L}_{g_0}$ .

4) *Théorème de Livsic : les intégrales sur les orbites périodiques donnent une information globale.* La quatrième étape est de relier les opérateurs  $d\mathcal{L}_{g_0}$  et  $\Pi_2$ . Il faut passer d'une information sur les géodésiques périodiques à une information sur le flot sur  $S_{g_0} M$ , cela peut se faire par une version quantitative du théorème de Livsic démontrée par Gouëzel-Lefeuvre (ou par un théorème de Livsic positif dû à Lopes-Thieullen). Cette information nous permet d'obtenir une estimée reliant  $d\mathcal{L}_{g_0}$  à  $\Pi_2$  : il existe  $\theta \in (0, 1)$  et  $C_2 > 0$  ne dépendant que de  $g_0$  tels que pour tout  $s > 0$  petit et tout  $h \in C^\infty(M; S^2 T^* M)$

$$\|\Pi_2 h\|_{H^{-s}(M)} \leq C_2 \|d\mathcal{L}_{g_0} h\|_{\ell^\infty(\mathcal{C})}^\theta \|h\|_{C^1(M)}^{1-\theta}.$$

On voit que cette estimée n'est pas tout à fait un contrôle linéaire de  $\Pi_2$  par  $d\mathcal{L}_{g_0}$ , mais cela suffira. En appliquant ce résultat à  $h := \pi_2^*(g' - g_0)$ , puis en utilisant (3.6) (première ligne) et (3.5) (deuxième ligne), on obtient

$$\begin{aligned} C_1 \|g' - g_0\|_{H^{-1-s}(M)} &\leq \|\Pi_2(g' - g_0)\|_{H^{-s}(M)} \leq C_2 \|d\mathcal{L}_{g_0}(g' - g_0)\|_{\ell^\infty(\mathcal{C})}^\theta \|g' - g_0\|_{C^1(M)}^{1-\theta} \\ &\leq C_2 \|g' - g_0\|_{C^1(M)}^{1-\theta} (\|\mathcal{L}(g') - \mathcal{L}(g_0)\|_{\ell^\infty(\mathcal{C})}^\theta + C_3 \|g' - g_0\|_{C^5(M)}^{2\theta}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  $C_1, C_2, C_3$  sont des constantes qui ne dépendent que de  $g_0$ . Ce qui est important dans cette estimée est que si on suppose  $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g_0)$ , alors  $\|g' - g_0\|_{H^{-1-s}(M)}$  est contrôlée par un  $\mathcal{O}(\|g' - g_0\|_{C^5(M)}^{1+\theta})$ . Si les normes  $\|\cdot\|_{H^{-1-s}(M)}$  et  $\|\cdot\|_{C^5(M)}$  étaient des normes équivalentes, on conclurait directement que si  $g' - g_0$  est assez petit il doit être nul. Comme ces normes ne le sont pas, on va devoir utiliser un théorème d'interpolation entre espaces fonctionnels pour les comparer.

5) *Interpolation.* La dernière étape est un exercice d'interpolation entre espaces de Sobolev. Fixons d'abord  $s = 1$  et notons  $n = \dim M$ , alors en supposant que  $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g_0)$  dans l'inégalité (3.7) et en utilisant l'injection de Sobolev  $H^{n+5}(M) \subset C^5(M)$ , on voit qu'il existe  $C_3 > 0$  ne dépendant que de  $g_0$  tel que

$$\|g' - g_0\|_{H^{-2}(M)} \leq C_3 \|g' - g_0\|_{H^{5+n}(M)}^{1+\theta}.$$

<sup>14</sup>Rappelons que  $\delta_{g_0}$  est la divergence sur les tenseurs symétriques.



En interpolant entre  $H^k(M)$  et  $H^{-2}(M)$  pour un  $k$  assez grand (qui ne dépend que de  $\theta$  et  $n$ ) et en utilisant notre hypothèse que  $\|g' - g_0\|_{H^k(M)}$  est borné par une constante fixée (car  $g$  est proche de  $g_0$  en norme  $C^k(M)$ ), on obtient que  $\|g' - g_0\|_{H^{5+n}(M)}$  est contrôlé par un  $\mathcal{O}(\|g' - g_0\|_{H^{-2}(M)}^{1-\theta/2})$ , donnant  $\|g' - g_0\|_{H^{-2}(M)} \leq C_4 \|g' - g_0\|_{H^{-2}(M)}^{1+\theta(1-\theta)/2}$  pour un  $C_4 > 0$  qui ne dépend que de  $g_0$ . Puisque  $\theta(1-\theta)/2 > 0$ , on voit que cela implique que  $g' = g_0$  ou  $\|g' - g_0\|_{H^{-2}(M)} > C_4^{-\frac{2}{\theta(1-\theta)}}$ . Ceci montre que pour  $\|g - g_0\|_{C^k}$  assez petit,  $g' = g_0$  et conclut la preuve.

Cette preuve donne une estimée de stabilité hölderienne semblable à (3.4) mais en terme de la norme  $\|\mathcal{L}(g) - \mathcal{L}(g_0)\|_{\ell^\infty(C)}$  et avec des puissances moins explicites. L'outil fondamental dans cette preuve est l'opérateur  $\Pi_2$  et en particulier l'estimée (3.6). L'estimée de stabilité (3.4) est obtenue dans l'article [GKL19] en combinant les idées de [GL19] avec des outils du formalisme thermodynamique comme la pression topologique, ceci évite l'utilisation de théorème de Livsic approché ou positif.

## REFERENCES

- [ADSK16] A. Avila, J. De Simoi, and V. Kaloshin, *An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse*, Ann. Math. (2) **184** (2016), 527–558.
- [BK85] K. Burns and A. Katok, *Manifolds with nonpositive curvature*, Ergodic Theory Dynam. Systems **5** (1985), no. 2, 307–317. MR 796758
- [Cro90] C. B. Croke, *Rigidity for surfaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), no. 1, 150–169. MR 1036134
- [CS98] C. B. Croke and V. A. Sharafutdinov, *Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold*, Topology **37** (1998), no. 6, 1265–1273. MR 1632920
- [GK80] V. Guillemin and D. Kazhdan, *Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds*, Topology **19** (1980), no. 3, 301–312.
- [GKL19] C. Guillarmou, G. Knieper, and T. Lefeuvre, *Geodesic stretch, pressure metric and marked length spectrum rigidity*, arXiv:1909.08666 (2019).
- [GL19] C. Guillarmou and T. Lefeuvre, *The marked length spectrum of Anosov manifolds*, Ann. of Math. (2) **190** (2019), no. 1, 321–344.
- [GWW92] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert, *Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds.*, Invent. Math. **110** (1992), no. 1, 1–22.
- [Ham99] U. Hamenstädt, *Cocycles, symplectic structures and intersection*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 1, 90–140. MR 1675892
- [HZ19] H. Hezari and S. Zelditch, *One can hear the shape of ellipses of small eccentricity*, arXiv 1907.03882. (2019).
- [Kac66] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly. **73** (1966), no. 4 Part 2.
- [Kat88] A. Katok, *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems **8\*** (1988), no. Charles Conley Memorial Issue, 139–152. MR 967635
- [OPS88] B. Osgood, R. Philipps, and P. Sarnak, *Compact isospectral sets of riemann surfaces*, J. Funct. Anal. **80** (1988), 212–234.
- [Ota90] J-P. Otal, *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 1, 151–162. MR 1038361
- [Vig80] M-F. Vignéras, *Variétés riemanniennes isospectrales non-isométriques*, Ann. Math. (2) **112** (1980), no. 1, 21–32.



*Email address:* `colin.guillarmou@math.u-psud.fr`

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, CNRS, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D'ORSAY, 91405, ORSAY,  
FRANCE.