Processus stochastiques: topologie, processus de Poisson et Processus de Lévy

Christophe Giraud

Université Paris-Sud et Ecole Polytechnique

Orsay, septembre-novembre 2012

Rappels convergence en loi

Notations:

- $(E, \mathcal{E})$ espace topologique mesuré
- $\langle \Pi, \phi \rangle = \int_E \phi(x)\,\Pi(dx)$ pour $\phi : E \to \mathbb{R}$ intégrable

Convergence étroite

Une suite (Π_n) de probabilités sur $(E, \mathcal{E})$ converge étroitement vers Π si

$$\langle \Pi_n, \phi \rangle \to \langle \Pi, \phi \rangle \quad \text{pour tout } \phi : E \to \mathbb{R} \text{ continue bornée}$$

Convergence en loi

Une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ converge en loi vers X ssi

$$\text{la suite } \mathbb{P}^{X_n} \text{ converge étroitement vers } \mathbb{P}^X$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[\phi(X_n)] \to \mathbb{E}[\phi(X)] \text{ pour tout } \phi : E \to \mathbb{R} \text{ continue bornée}$$

Cas $E = \mathbb{R}$

Notations:

- Π_n, Π des probas sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- Fonctions de répartition: $F_\Pi(x) = \Pi(]-\infty, x])$
- Fonctions caractéristiques: $\phi_\Pi(s) = \int_\mathbb{R} e^{isx}\,\Pi(dx)$

Caractérisation par les fonctions de répartition

$\Pi_n \overset{\text{étroite}}{\longrightarrow} \Pi \iff F_{\Pi_n}(x) \to F_\Pi(x)$ pour tout x où F_Π est continue.

Caractérisation par les fonctions caractéristiques

$\Pi_n \overset{\text{étroite}}{\longrightarrow} \Pi \quad \iff \quad \phi_{\Pi_n}(s) \to \phi_\Pi(s)$ pour tout s.

Cas $E = \mathbb{R}$

Résultat plus précis:

Théorème de Lévy

Supposons que

- $\phi_{\Pi_n}(s)$ converge vers une limite notée $\phi(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$
- $s \mapsto \phi(s)$ est continue en 0

alors il existe une unique proba Π telle que

- $\Pi_n \stackrel{\text{étroite}}{\longrightarrow} \Pi$
- $\phi_\Pi = \phi$

Ce résultat reste vrai dans $E = \mathbb{R}^d$.