Processus stochastiques: topologie, processus de Poisson et Processus de Lévy

Christophe Giraud

Université Paris-Sud et Ecole Polytechnique

Orsay, septembre-novembre 2012

Rappels cours 1

$(E, \mathcal{E})$ espace mesuré

T un ensemble d'indice (typiquement $[0,1]$ ou $\mathbb{R}$)

Tribu produit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\otimes T} &= \sigma\left(\bigcup_{S \text{ fini}} \mathcal{E}_S\right) \\ &= \bigcup_{S \text{ dénombrable}} \mathcal{E}_S \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}_S = \left\{ A_S \times E^{T \setminus S} : \; A_S \in \mathcal{E}^{\otimes S} \right\}$

Famille projective de lois fini-dimensionnelles

Une famille $\{\Pi_S : S \text{ fini} \subset T\}$ de probas sur $(E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})$ est dite **projective** si pour tout $S \subset S'$ finis on a

$$\Pi_{S'}(A \times E^{S' \setminus S}) = \Pi_S(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{E}^{\otimes S}.$$

Théorème de Kolmogorov

Soit $(E, \mathcal{E})$ est un espace polonais (métrique, complet, séparable) muni de sa tribu borélienne.

Si $\{\Pi_S : S \text{ fini} \subset T\}$ une famille projective de probas sur $(E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})$, alors il existe une unique proba Π sur $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T})$ telle que

$$\Pi(A \times E^{T \setminus S}) = \Pi_S(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{E}^{\otimes S}.$$

Notations

$\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], E)$ avec (E, d) polonais

$$\text{et} \qquad d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} d(f(t), g(t))$$

Tribu produit sur $\mathcal{C}$

- $(\mathcal{C}, d_\infty)$ est polonais
- $\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cap \mathcal{E}^{\otimes[0,1]}$

Critère de Kolmogorov

Soit X un processus à valeurs dans un polonais tels que

$$\mathbb{E}\left[d(X_t, X_s)^p\right] \leq C|t-s|^{1+\beta} \quad \text{avec } p > 1. \tag{1}$$

Alors il existe un processus Z à valeurs réelles tels que

1. $\mathbb{P}(Z_t = X_t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$
2. Z est p.s. α-Holderien pour tout $\alpha < \beta/p$.

Corollaire

Soit $\{\Pi_S : S \text{ fini} \subset T\}$ une famille projective de probas et X le processus canonique associé à Π construite par le théorème de Kolmogorov.

Si X vérifie (1), alors il existe $\tilde{\Pi}$ sur $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$ de fidi $\{\Pi_S : S \text{ fini} \subset T\}$.

Topologie dans l'espace $\mathcal{D}$ de Skorohod

Référence : P. Billingsley. Convergence of Probability Measures.

Espace de Skorohod

Espace de Skorohod

$$\mathcal{D} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ càdlàg}\}$$

où càdlàg $=$ continu à droite avec limite à gauche:

$$\lim_{s \searrow t} f(s) = f(t) \quad \text{et} \quad \lim_{s \nearrow t} f(s) \quad \text{existe.}$$

Propriétés

- Les fonctions $f \in \mathcal{D}$ ont au plus un nombre dénombrable de discontinuité.
- $\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| < \infty$ pour tout $f \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ est-il un espace polonais muni de la distance uniforme?

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$$

Topologie uniforme

$\mathcal{D}$ n'est pas séparable muni de la topologie uniforme

preuve:

Notons $f_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0,\alpha[}(t)$.

On a $d_\infty(f_\alpha, f_\beta) = 1$ pour tout $\alpha \neq \beta \in [0,1]$.

Objectifs

Trouver d tel que

- $(\mathcal{D}, d)$ est Polonais
- $\mathcal{B}_d(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$

Topologie de Skorohod

On dit que $f_n \overset{sko}{\rightarrow} f$ s'il existe une suite de fonctions $\lambda_n : [0,1] \rightarrow [0,1]$ strictement croissantes, continues et telles que

- $\lambda_n(0) = 0, \ \lambda_n(1) = 1$
- $d_\infty(\lambda_n, Id) \rightarrow 0$
- $d_\infty(f_n \circ \lambda_n, f) \rightarrow 0$

- la topologie de Skorohod est plus faible que la topologie uniforme
- elles coincident sur $\mathcal{C}$

Distance de Skorohod

$$d_{sko}(f,g) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\left\{d_\infty(f, g\circ\lambda) + \sup_{s<t}\left|\log\left[\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right]\right|\right\}$$

où

$\Lambda = \{\lambda : [0,1] \to [0,1] \text{ continue, croissante}, \lambda(0)=0,\ \lambda(1)=1\}$

Théorème

- d_{sko} métrise la topologie de Skorohod
- $(\mathcal{D}, d_{sko})$ est polonais
- $\mathcal{B}_{d_{sko}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}\cap\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$

Attention!

- $p_t : (\mathcal{D}, d_{sko}) \to \mathbb{R}$ est continue en f uniquement si f continue en t.
- $f_n \stackrel{sko}{\to} f$ et $g_n \stackrel{sko}{\to} g$ n'implique pas que $f_n + g_n \stackrel{sko}{\to} f + g$ (mais c'est vrai si f ou g est continue sur $[0,1]$)

Par contre

- $f \to \sup_{t\in[0,1]} |f_t|$ est continue
- $f \to \int_0^1 \phi(f(s))\, ds$ aussi pour tout $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.