Processus stochastiques: topologie, processus de Poisson et processus de Lévy

Christophe Giraud

Université Paris-Sud et Ecole Polytechnique

Orsay, septembre-novembre 2012

Page web du cours

`http://www.cmap.polytechnique.fr/~giraud/Orsay/M2PS.html`

Références

- Miermont G. *Théorèmes limites et processus de Poisson.* Notes de cours, Orsay 2011-2012. `http://www.math.u-psud.fr/~miermont/thlim.pdf`
- Billingsley P. *Convergence of probability measures.* Wiley, 1999.
- Ethier S.N. & Kurtz T.G. *Markov processes.* Cambridge University Press, 2002.

Introduction

Marche aléatoire en temps continu

Marche aléatoire

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n\,, \quad \text{avec les } \xi_i \text{ i.i.d. et de moyenne nulle}$$

$\mathbf{Var}(\xi_i) = 1$

Le théorème central limite donne pour $t > 0$:

$$Z_t^{(n)} = n^{-1/2} S_{\lfloor nt \rfloor} \xrightarrow{\text{loi}} Z_t \ \sim \ \mathcal{N}(0, t)$$

Si on "zoom-out" voit-on la convergence de $\left(Z_t^{(n)} : t \geq 0\right)$ vers une trajectoire aléatoire?

$\mathbf{Var}(\xi_i) < \infty$

Variante continue de $Z^{(n)}$

Interpolation linéaire de la marche aléatoire:

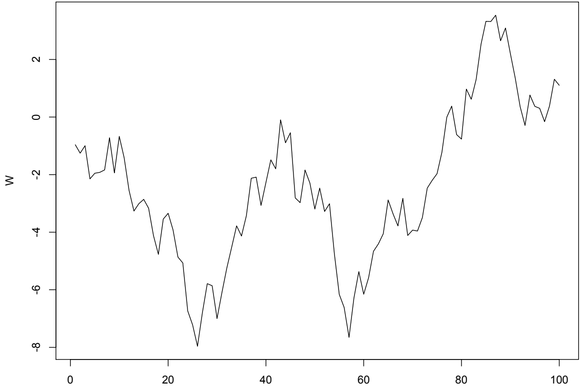
$$W_t^{(n)} = n^{-1/2}\left(\{nt\}\, S_{\lfloor nt \rfloor} + (1 - \{nt\}) S_{\lfloor nt \rfloor + 1}\right)$$

où $\{nt\} = nt - \lfloor nt \rfloor$ est la partie fractionnaire de nt.

Propriétés :

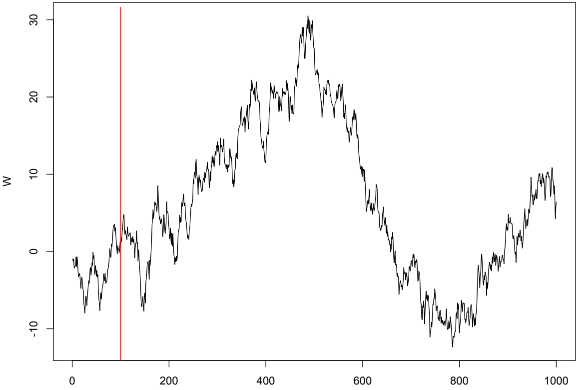
- $t \to W_t^{(n)}$ est continue
- Si $\mathbf{Var}(\xi_i) = 1$: $W_t^{(n)} \stackrel{\text{loi}}{\to} Z_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

$\mathrm{Var}(\xi_i) < \infty$



Plot de $W^{(n)}$

$\mathrm{Var}(\xi_i) < \infty$



zoom out $\times 10$

$\mathrm{Var}(\xi_i) < \infty$

zoom out $\times 10$

$\mathrm{Var}(\xi_i) < \infty$

zoom out $\times 10$

$\mathrm{Var}(\xi_i) < \infty$

Questions?

- Existe-t-il un processus limite?
- Est-il continu? différentiable?
- Quelles sont ses propriétés?
- Y'a-t-il convergence de $Z^{(n)}$ ou $W^{(n)}$ vers ce processus? (dans quel sens?)

Mouvement brownien

Si le processus limite $(Z_t,\ t \geq 0)$ existe, on sait que:

- $Z_0 = 0$ p.s.
- Pour $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ on a

$$\mathrm{Loi}\left(\left(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\right)_{i=1,\ldots,n}\right) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$$

$\mathrm{Var}(\xi_i) = +\infty$

Lorsque la variance est infinie?

Exemple

ξ_i i.i.d. de loi de Cauchy

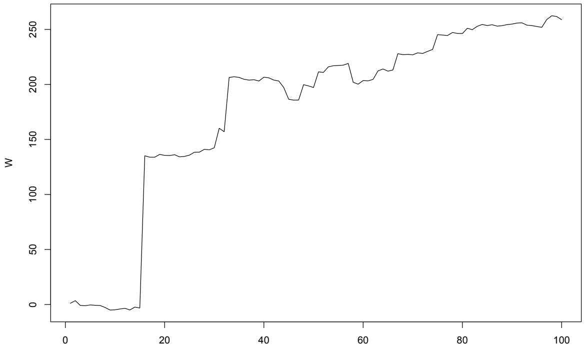
$$\xi_i \ \sim \ \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\,.$$

Renormalisation

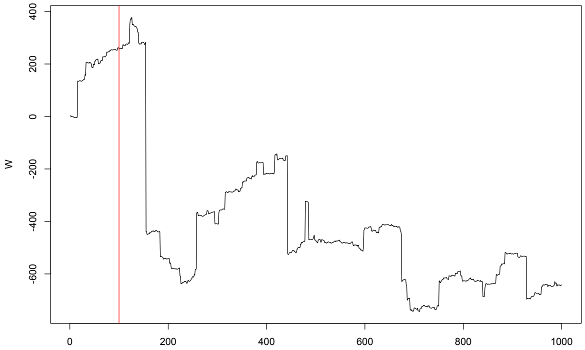
On a $\mathbb{E}\left[e^{i\alpha S_n}\right] = e^{-n|\alpha|}$ donc il faut regarder la renormalisation

$$\tilde{Z}_t^{(n)} = n^{-1} S_{\lfloor nt \rfloor}$$

$\mathrm{Var}(\xi_i) = +\infty$

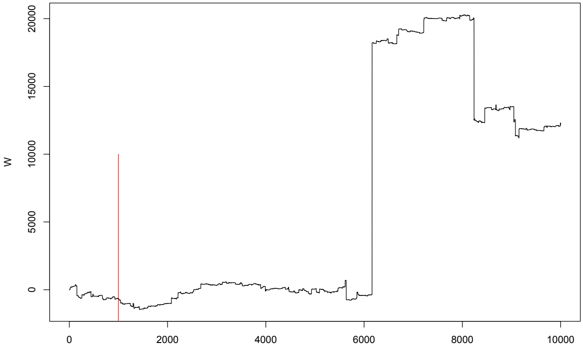


Plot de $\tilde{W}^{(n)}$



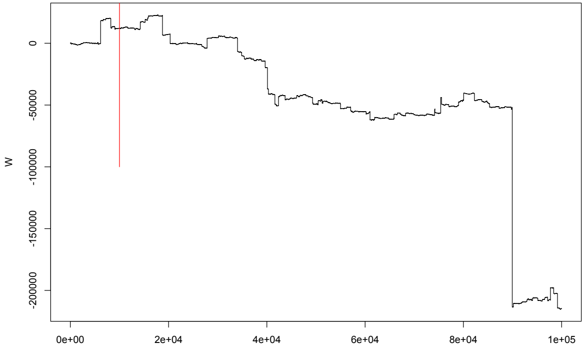
zoom out $\times 10$

$\mathrm{Var}(\xi_i) = +\infty$



zoom out $\times 10$

$\mathrm{Var}(\xi_i) = +\infty$



zoom out $\times 10$

$\mathbf{Var}(\xi_i) = +\infty$

Questions?

- Existe-t-il un processus limite $(\tilde{Z}_t)_{t\geq 0}$?
- Quelle est sa régularité? ses propriétés?
- Y'a-t-il convergence de $\tilde{Z}^{(n)}$ ou $\tilde{W}^{(n)}$ vers ce processus? (dans quel sens?)

$\mathbf{Var}(\xi_i) = +\infty$

Processus de Lévy (accroissements indépendants stationnaires)

Si le processus limite $(\tilde{Z}_t,\ t \geq 0)$ existe, on sait que:

- $\tilde{Z}_0 = 0$ p.s.
- Pour $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ les $\tilde{Z}_{t_{i+1}} - \tilde{Z}_{t_i}$ sont indépendants de même loi que $\tilde{Z}_{t_{i+1}-t_i}$.

Plan et objectifs

Objectifs du cours

- Définir clairement le cadre mathématiques des processus à temps continu: topologie, tribus, compacité, etc
- Définir les processus limites: mouvement brownien et processus de Lévy (et montrer leur existence)
- Etudier les propriétés de ces processus.

Plan du cours

1. Théorie des processus
2. Processus de Poisson
3. Processus de Lévy

Rappels

Références

- J-F. Le Gall. *Intégration, Probabilités, Processus Aléatoires.* http://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf
- W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.*

Espace probabilisé : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Espace d'état : $(E, \mathcal{E})$

Variable aléatoire

variable aléatoire : $X \ : \ (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ mesurable

Loi de X

Loi de X: probabilité $\mathbb{P}^X$ sur $(E, \mathcal{E})$ définie par

$$\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \text{ pour } B \in \mathcal{E}.$$

Représentation canonique d'une loi

La représentation canonique d'une mesure de probabilité Π sur $(E, \mathcal{E})$ est la variable aléatoire

$$\begin{array}{rcl} X \ : \ (E, \mathcal{E}, \Pi) & \to & (E, \mathcal{E}) \\ \omega & \mapsto & \omega \end{array}$$

Cette variable aléatoire a pour loi Π.

Nous allons regarder maintenant des variables aléatoires à valeurs dans des espaces de fonctions...