Formulaire martingales

Rappels espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $Z : \Omega \to \mathbb{R}^n$ deux variables aléatoires (fonctions mesurables). On note $\sigma(Z)$ la plus petite tribu rendant Z mesurable.

Lemme

Si X est $\sigma(Z)$-mesurable, il existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ mesurable telle que $X = h(Z)$.

Preuve: Supposons que X ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Comme X est $\sigma(Z)$-mesurable on a $\{X = x_i\} \in \sigma(Z)$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Traduction : il existe des $B_i \subset \mathbb{R}^n$ mesurables tels que $\{X = x_i\} = \{Z \in B_i\}$. On vérifie alors que $X = h(Z)$ avec $h(z) = \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{1}_{B_i}(z)$.
Le cas général est obtenu par approximation de X par des fonctions simples. $\square$

Espérance conditionnelle :
Supposons (pour simplifier) que $d = 1$ et $\mathbf{E}[X^2] < \infty$. Notons H l'espace des fonctions mesurables $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant $\mathbf{E}[h(Z)^2] < \infty$. On appelle **espérance conditionnelle** de X sachant Z (noté $\mathbf{E}(X|Z)$) la variable aléatoire $h(Z)$ où h minimise

$$\min_{h \in H} \mathbf{E}[(X - h(Z))^2]$$

L'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X|Z)$ est donc la meilleure approximation possible (pour la norme $\|Y\|^2 = \mathbf{E}[Y^2]$) de X par une variable aléatoire de la forme $h(Z)$. Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est une tribu, $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ représente la projection (relativement à la norme $\|\cdot\|$) de X sur l'espace H des variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurables et de carré intégrable.

On étend cette définition aux variables aléatoires X intégrables et on vérifie que

$\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ est l'unique[a] variable aléatoire vérifiant
1- $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ est $\mathcal{F}$-mesurable
2- pour toute variable aléatoire réelle Y qui est $\mathcal{F}$-mesurable et bornée, on a
$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{F})Y)$.

[a] à un ensemble de mesure nulle près

En pratique : pour calculer $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ on sépare dans X les termes $\mathcal{F}$-mesurables de ceux indépendants de $\mathcal{F}$ et on utilise les règles suivantes.

Règles de calculs

R1. $\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right)\right) = \mathbf{E}\left(X\right)$.
R2. Si X est $\mathcal{F}$-mesurable, alors $\mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right) = X$.
R3. Si X est indépendante de $\mathcal{F}$ alors $\mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right) = \mathbf{E}\left(X\right)$.
R4. Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\mathbf{E}\left(aX + bY \mid \mathcal{F}\right) = a\,\mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right) + b\,\mathbf{E}\left(Y \mid \mathcal{F}\right)$.
R5. Si Y est $\mathcal{F}$-mesurable alors $\mathbf{E}\left(YX \mid \mathcal{F}\right) = Y\,\mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right)$.
R6. Pour tout $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, on a $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mid \mathcal{F}\big) = \mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right)$.
R7. Si $\mathcal{G}$ est indépendante de X et de $\mathcal{F}$ alors $\mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right)$.
R8. Si $X \le Y$, alors $\mathbf{E}\left(X \mid \mathcal{F}\right) \le \mathbf{E}\left(Y \mid \mathcal{F}\right)$.

Remarques

1- Si $Z : \Omega \to E$ avec E discret, on a $\mathbf{E}(X|Z) = h(Z)$ où $h(z) = 0$ si $\mathbf{P}(Z = z) = 0$ et $h(z) = \mathbf{E}(X|Z = z)$ sinon.

2- Si (X, Z) a une densité jointe $f(x, z)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on a $\mathbf{E}(X|Z) = h(Z)$ avec $h(z) = \int_{\mathbb{R}} x f(x|z)\, dx$, où $f(x|z) = 0$ si $\int_{\mathbb{R}} f(x', z)\, dx' = 0$ et $f(x|z) = f(x, z)/\int_{\mathbb{R}} f(x', z)\, dx'$ sinon.

Temps d'arrêt

Soit $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots$ une suite de tribus enboitées (filtration). Typiquement $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ où $(X_0, X_2, \ldots)$ est une suite de variables aléatoires.

Temps d'arrêt :

– Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n.
– On note $\mathcal{F}_T = \{$évènements A tels que $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$ = information disponible au temps T.

Dans un langage moins formel, un temps d'arrêt est une variable aléatoire $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que " à partir de l'information $\mathcal{F}_n$ on sait si $T(\omega) = n$ ou non".

Un exemple typique est le premier temps de passage de la suite (X_n) en un point a donné. Par contre le dernier temps de passage en a n'est pas un temps d'arrêt en général.

Martingales

Une suite $(X_0, X_1, \ldots)$ de variables intégrables est une martingale si $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$.

La moyenne d'une martingale est constante au cours du temps : $$\mathbf{E}\left(X_n\right) = \mathbf{E}\left(X_0\right), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Preuve: Récurrence à partir de l'égalité $\mathbf{E}\left(X_{n+1}\right) \stackrel{R1}{=} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right) \stackrel{\text{martingale}}{=} \mathbf{E}\left(X_n\right).$ □

Cette égalité reste vraie en un temps d'arrêt T (avec quelques restrictions).

Notations On note $n \wedge T := \min(n, T)$ et $X_{n\wedge T}$ la variable aléatoire

$$X_{n\wedge T} : \begin{array}{ll} \Omega & \to \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto X_{n\wedge T(\omega)}(\omega). \end{array}$$

Théorème d'arrêt

Soit (X_n) une martingale et T un temps d'arrêt.

1- Le processus $(X_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale ,

2- S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(T \le N) = 1$,

$$\text{alors} \qquad \mathbf{E}\,(X_T) = \mathbf{E}\,(X_0)\ ,$$

3- Si $\mathbf{P}(T < +\infty) = 1$ et s'il existe Y telle que $\mathbf{E}(Y) < +\infty$ et $|X_{n\wedge T}| \le Y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (condition de domination)

$$\text{alors} \qquad \mathbf{E}\,(X_T) = \mathbf{E}\,(X_0)\ .$$

****Warning**** Attention, on rencontre souvent des situations où $\mathbf{E}(X_T) < \mathbf{E}(X_0)$ (ce sont des cas où les hypothèses du théorème ne sont pas vérifiées).

Preuve: 1- Notons $M_n = X_{n\wedge T}$. On a $M_n = X_n \mathbf{1}_{\{T>n-1\}} + X_T \mathbf{1}_{\{T\le n-1\}}$. Comme

$$X_T \mathbf{1}_{\{T\le n-1\}} = X_1 \mathbf{1}_{\{T=1\}} + \cdots + X_{n-1}\mathbf{1}_{\{T=n-1\}},$$

avec $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{n-1}$ pour $k \le n-1$, la variable aléatoire $X_T \mathbf{1}_{\{T\le n-1\}}$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. On obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbf{E}\big(X_n \mathbf{1}_{\underbrace{\{T > n-1\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\big) + \mathbf{E}\big(X_T \mathbf{1}_{\{T\le n-1\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\big) \\ &= \mathbf{1}_{\{T>n-1\}} \underbrace{\mathbf{E}\,(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})}_{\substack{= X_{n-1} \text{ car} \\ (X_n) \text{ martingale}}} + X_T \mathbf{1}_{\{T\le n-1\}} \\ &= X_{n-1} \mathbf{1}_{\{T>n-1\}} + X_T \mathbf{1}_{\{T\le n-1\}} \\ &= X_{(n-1)\wedge T} \ = \ M_{n-1}. \end{aligned}$$

Donc (M_n) est une martingale.

2- Pour T borné, considérons N tel que $T \le N$. Le processus $(X_{n\wedge T})$ est une martingale, donc au temps N

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}\,(X_{N\wedge T}) & = & \mathbf{E}\,(X_{0\wedge T})\ . \\ \| & & \| \\ \mathbf{E}\,(X_T) & & \mathbf{E}\,(X_0) \end{array}$$

3- Si $T < +\infty$ avec probabilité 1 et $X_{n\wedge T}$ vérifie la condition de domination. Le processus $(X_{n\wedge T})$ est une martingale, donc $\mathbf{E}\,(X_{n\wedge T}) = \mathbf{E}\,(X_0)$. Faisons tendre n vers l'infini dans l'égalité précédente. On sait que $X_{n\wedge T} \to X_T$ et comme les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées cela entraîne que $\mathbf{E}\,(X_{n\wedge T}) \to \mathbf{E}\,(X_T)$. Le passage à la limite dans l'égalité précédente donne donc $\mathbf{E}\,(X_T) = \mathbf{E}\,(X_0)$. □

Asymptotique

Toute martingale positive (X_n) converge p.s. lorsque $n \to \infty$ vers une limite X_∞ vérifiant $X_n \ge \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.