Quelques tests incontournables

Christophe Giraud

Université Paris Sud et Ecole Polytechnique

MAP 433

Niveau d'un test

Soit $T : \mathcal{X}^n \to \{0,1\}$ un test de $\mathbf{H_0} : \theta \in \Theta_0$ contre $\mathbf{H_1} : \theta \in \Theta_1$.

Le test T est de niveau α si

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbf{P}_\theta(T(X) = 1) \leq \alpha \,.$$

Remarque: plus α est petit moins le test a tendance à rejeter $\mathbf{H_0}$.

p-value

Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ une famille de tests tels que T_α est de niveau α.

La *p*-value des observations X, correspond au plus petit niveau α à partir duquel on rejette $\mathbf{H_0}$.

Conclusion: Si p-value$(X) < \alpha$ le test T_α rejette $\mathbf{H_0}$

Test de Neyman-Pearson

Cadre:

- $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de loi $d\mathbf{P}_\theta(x) = p(\theta, x)\, d\mu(x)$
- $\mathbf{H_0}$: $\theta = \theta_0$ contre $\mathbf{H_1}$: $\theta = \theta_1$

Test de Neyman-Pearson

S'il existe $t_{\alpha,n}$ tel que $\mathbf{P}_{\theta_0}\big(p(\theta_1, X) > t_{\alpha,n}\, p(\theta_0, X)\big) = \alpha$ alors

$$T_{\mathrm{NP}} = \mathbf{1}_{\{p(\theta_1,X) > t_{\alpha,n} p(\theta_0,X)\}}$$

est le test le plus puissant parmi tous les tests de niveau α.

Test de Wald

Cadre:

$\mathbf{H_0} : \{g(\theta) = 0\}$ contre $\mathbf{H_1} : \{g(\theta) \neq 0\}$
avec $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ submersion $\mathcal{C}^1$:

- $m \leq d$
- $\text{rang}(Dg(\theta)) = m$ pour tout $\theta \in \text{interieur}(\{g(\theta) = 0\})$.

Test de Wald

Si $\hat{\theta}$ estimateur de θ vérifiant

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, V(\theta))$$

avec $V(\theta)$ inversible, alors sous $\mathbf{H_0}$ on a

$$W_n = ng(\hat{\theta})^T \left[Dg(\hat{\theta}) V(\hat{\theta}) Dg(\hat{\theta})^T \right]^{-1} g(\hat{\theta}) \xrightarrow{\text{loi}} \chi^2(m)$$

Le test de Wald consiste à rejeter $\mathbf{H_0}$ si $W_n > q_{m,\alpha}$ avec $q_{m,\alpha}$ tel que $\mathbf{P}(\chi^2(m) \geq q_{m,\alpha}) = \alpha$.

Cadre:

- Q_0 loi sur $\{1, \ldots, d\}$ et $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Q$
- $\mathbf{H_0}$: $Q = Q_0$ contre $\mathbf{H_1}$: $Q \neq Q_0$

Test du χ^2

Si $\hat{Q}(k) = \frac{1}{n}\,\mathbf{card}\,\{i : \; X_i = k\}$, alors alors sous $\mathbf{H_0}$ on a

$$R_n^2 = n \sum_{k=1}^{d} \frac{\left(\hat{Q}(k) - Q_0(k)\right)^2}{Q_0(k)} \xrightarrow{\text{loi}} \chi^2(d-1).$$

Le test du χ^2 consiste à rejeter $\mathbf{H_0}$ si $R_n^2 > q_{d-1,\alpha}$.

⚠ Si $nQ_0(k)$ est petit l'approximation gaussienne est mauvaise

En pratique: si $nQ_0(k) \leq 5$ on agrège la classe k avec une autre.