# Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

## MAP 311 - PC 5 - 15 juin 2009

**Stéphanie Allassonnière, Christophe Giraud, Caroline Hillairet**

## Sommes de variables aléatoires indépendantes

**EXERCICE 1 - Loi du $\chi^2$ et grandes déviations**

La loi du $\chi^2$ (prononcer ki-deux) à $n$ degrés de liberté est la loi de $X = \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$ où les $\varepsilon_i$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. C'est une loi très importante en statistiques, notamment lorsqu'on veut savoir si des données sont cohérentes avec un modèle probabiliste ayant $n$ paramètres. Il est alors important de savoir estimer la taille des fluctuations de $X$ autour de son espérance.

1. Quelle est l'espérance et la variance de $X$ ? Montrer que la loi de $X$ a une densité de la forme $c_n x^{n/2-1} e^{-x/2} 1_{x>0}$.
2. Pour $\lambda \in ]0, 1/2[$, calculer $\mathsf{E}(e^{\lambda X})$ et en déduire l'inégalité pour tout $\delta > 0$ :
$$\mathsf{P}(X > (1+\delta)n) \leq e^{-nL(\lambda)} \quad \text{avec } L(\lambda) = (1+\delta)\lambda + \frac{1}{2}\log(1-2\lambda).$$
3. En optimisant l'inégalité précédente en $\lambda$, en déduire que
$$\mathsf{P}(X > (1+\delta)n) \leq e^{-n\phi(\delta)} \leq e^{-n(\delta^2/4-\delta^3/6)} \quad \text{avec } \phi(\delta) = \frac{1}{2}(\delta - \log(1+\delta)).$$
4. En répétant le même raisonnement en remplaçant $\lambda$ par $-\lambda$ montrez que
$$\mathsf{P}(X < (1-\delta)n) \leq e^{-n\psi(\delta)} \leq e^{-n\delta^2/4} \quad \text{avec } \psi(\delta) = -\frac{1}{2}(\delta + \log(1-\delta)).$$
5. En déduire pour tout $x > 0$ l'inégalité de déviation
$$\mathsf{P}(|X-n| > \sqrt{n}\,x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6\sqrt{n}}\right).$$

**EXERCICE 2 - Moyenne et variance empirique : introduction aux statistiques**

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. vérifiant $\mathsf{E}(X_1) = m$ et $\mathsf{Var}(X_1) = \sigma^2 < +\infty$. On note $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ la moyenne empirique des $X_i$.

1. Calculer $\mathsf{E}(\bar{X}_n)$ et $\mathsf{Var}(\bar{X}_n)$.
2. Pour $\alpha \in ]0,1[$, construire à l'aide de l'inégalité de Markov un intervalle aléatoire $\mathcal{I}_{n,\alpha}$ tel que
   (a) $\mathsf{P}(m \in \mathcal{I}_{n,\alpha}) \geq 1 - \alpha$ pour tout $n \geq 1$,
   (b) $\lim_{n\to\infty}\text{longueur}(\mathcal{I}_{n,\alpha}) = 0$.
   
   Interpréter.
3. On pose $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Calculer $\mathsf{E}(\hat{\sigma}^2)$ et interpréter cette grandeur.

# Convergence et loi des grands nombres

**EXERCICE 3** - Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si $(\mathsf{P}(X_n > 0))_{n\geq 1}$ tend vers 0.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0 si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \mathsf{P}(X_n > 0) < +\infty$.
3. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $X_n$ suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. Préciser si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en moyenne, en probabilité, presque sûrement, dans le cas où $p_n = \frac{1}{n^2}$ puis dans le cas où $p_n = \frac{1}{n^3}$.
4. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $X_n$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha_n)$. Préciser si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en moyenne, en probabilité, presque sûrement, dans le cas où $\alpha_n = \frac{1}{n}$ puis dans le cas où $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$.
5. On suppose que pour tout $n \geq 1$, la loi de $X_n$ est donnée par $\mathsf{P}(X_n = n^2) = \beta_n$ et $\mathsf{P}(X_n = 0) = 1-\beta_n$. Préciser si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en moyenne, en probabilité, presque sûrement, dans le cas où $\beta_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$, puis dans le cas où $\beta_n = \frac{1}{n^3}$.

**EXERCICE 4** - Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée et $\alpha > 0$ calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

**EXERCICE 5** - Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires I.I.D. (i.e. indépendantes et de même loi) strictement positives et d'espérance 1 et telles que $\mathbb{P}(X_i = 1) < 1$.
On pose $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

1. En remarquant que pour $x \in ]0, \infty[\setminus\{1\}$, $\ln(x) < x - 1$, vérifier que $\mathbb{E}(\ln(X_1)) < 0$. En étudiant le comportement de $\frac{1}{n}\ln(Y_n)$ lorsque $n \to +\infty$, montrer que la suite $Y_n$ converge presque sûrement vers une limite que l'on précisera.
2. Un joueur joue tous les jours le dixième de sa fortune à pile ou face avec un ami. Quelle est l'évolution de cette fortune au bout d'un temps très long ?
3. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$. La suite $Y_n$ converge-t-elle en moyenne ?

**EXERCICE 6** - Théorème de Weierstrass
Soient $f$ une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n$ une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

1. Montrer que $p_n(x) := \mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$ est un polynôme en $x$ (appelé polynôme de Bernstein de $f$).
2. En utilisant l'uniforme continuité de $f$ sur $[0, 1]$, montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$,
$$|p_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|] \leq \epsilon\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - x| < \delta) + 2\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - x| > \delta) \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|.$$
En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$,
$$|p_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + 2\frac{x(1-x)}{n\delta^2} \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|.$$
3. Démontrer le théorème de Weierstrass : toute application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de polynômes.