Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 4 - 8 juin 2009 - Stéphanie Allassonnière, Christophe Giraud, Caroline Hillairet

Vecteurs aléatoires à valeurs réelles. Lois conditionnelles.

EXERCICE 1 -

1. Soit X une variable aléatoire uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Quelle est la loi de $\tan X$? Que peut on dire de son espérance ?
2. Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \dfrac{\mathbf{1}_{[0,1]}(x)}{(\ln 2)(1+x)}$. Montrer que $\dfrac{1}{X} - \left[\dfrac{1}{X}\right]$ a même loi que X.

EXERCICE 2 -**Loi log-normale**

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer la densité de la variable aléatoire $Z = e^X$: cette loi s'appelle la loi log-normale.
2. Pour $a \in [-1,1]$, soit $f_a(x) = f^Z(x)(1 + a\sin(2\pi \ln x))$. Montrer que si Z_a est de densité f_a, alors Z_a et Z ont mêmes moments, et donc que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité.

EXERCICE 3 -

Soient X et Y deux variables indépendantes identiquement distribuées et centrées. Montrer que

$$E(|X - Y|) \geq E(|X|).$$

EXERCICE 4 -

Soient X et Y des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi du couple $(X/Y, Y)$ puis celle de X/Y. Les variables aléatoires X/Y et Y sont elles indépendantes ?

EXERCICE 5 -

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité :

$$g(x,y) = \begin{cases} = \dfrac{1}{2} x\, y \quad \text{si } (x,y) \in D \\ \\ = 0 \text{ si } (x,y) \notin D \end{cases}$$

où D est le premier quart du disque centré en 0 de rayon 2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer la densité de probabilité de la variable $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, puis celle de $Z = R^2$.

EXERCICE 6 -
Soit pour $1 \leq k \leq n$ des v.a. réelles indépendantes T_k telles que $\mathsf{P}(T_k = x) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbf{R}$. (C'est le cas si ce sont des v.a. à densité.)
1) Montrer que $\mathsf{P}(T_i = T_j) = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$, puis que $\mathsf{P}(\exists i \neq j : T_i = T_j) = 0$.
Nous pouvons donc définir une v.a. M qui est l'indice de la plus petite des T_k, $1 \leq k \leq n$, et

$$S = \min_{1 \leq k \leq n} T_k = T_M \,, \qquad R_i = T_i - S \,, \quad 1 \leq i \leq n \,.$$

Nous supposons désormais que T_k est exponentielle de paramètre $\alpha_k > 0$ pour $1 \leq k \leq n$.
2) Montrer que pour tous indices j et toutes fonctions positives f et g_i pour $i \neq j$,

$$\mathsf{E}\Bigg(\mathbf{1}_{M=j} f(S) \prod_{i \neq j} g_i(R_i)\Bigg) = \alpha_j \int_{\mathbb{R}^+} f(t) e^{-(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)t} \, dt \times \prod_{i \neq j} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^+} g_i(u) e^{-\alpha_i u} \, du \,.$$

3) En déduire que $\{M = j\}$ est un événement indépendant de la v.a. S, que

$$\mathsf{P}(M = j) = \frac{\alpha_j}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \,,$$

et que S est de loi exponentielle de paramètre $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
4) En déduire aussi que conditionnellement à $\{M = j\}$, pour $i \neq j$ les v.a. S et R_i sont indépendantes et les R_i ont des loi exponentielles de paramètres α_i.

EXERCICE 7 -(difficile)
1) Soient $X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires i.i.d de loi exponentielle

$$\mu(dx) = \mathbf{1}_{x>0} e^{-x} dx.$$

Calculer la loi du vecteur $U_1, \dots, U_{n-1}, S_n$ défini par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } U_i = X_i / S_n.$$

En déduire la loi de $U = (U_1, \dots, U_{n-1})$ puis celle du vecteur $V = (U_1, \dots, U_n)$ où $U_n = X_n / S_n$.
2)(*) Soit T un triangle équilatéral de sommets a, b, c. On choisit un point v au hasard dans T. Déterminer la loi de la surface du triangle de sommets a, b, v.