Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 1 - 14 mai 2007 - Caroline Hillairet

Probabilités

EXERCICE 1 -
Si n personnes sont réunies dans une pièce, quelle est la probabilité qu'aucune paire d'individus n'ait un anniversaire commun ? Déterminer $n_{\min}$ pour que cette probabilité soit inférieure à 0.5 (on pourra utiliser l'équivalence $\ln(1+x) \sim x$ pour $x << 1$).

EXERCICE 2 - Une personne écrit n lettres et les ferme avant d'écrire les adresses sur les enveloppes. On suppose que tous les destinataires ont une adresse différente.

Quelle est la probabilité pour qu'au moins une lettre arrive au bon destinataire ? Donner la limite de cette probabilité lorsque $n \to \infty$.

EXERCICE 3 -
Dans un match de tennis, un joueur a une probabilité p de gagner un point contre son adversaire lorsqu'il est au service. Calculer la probabilité qu'il a de gagner le jeu sachant qu'il est à 40-30 sur son service.

Evénements indépendants et conditionnement

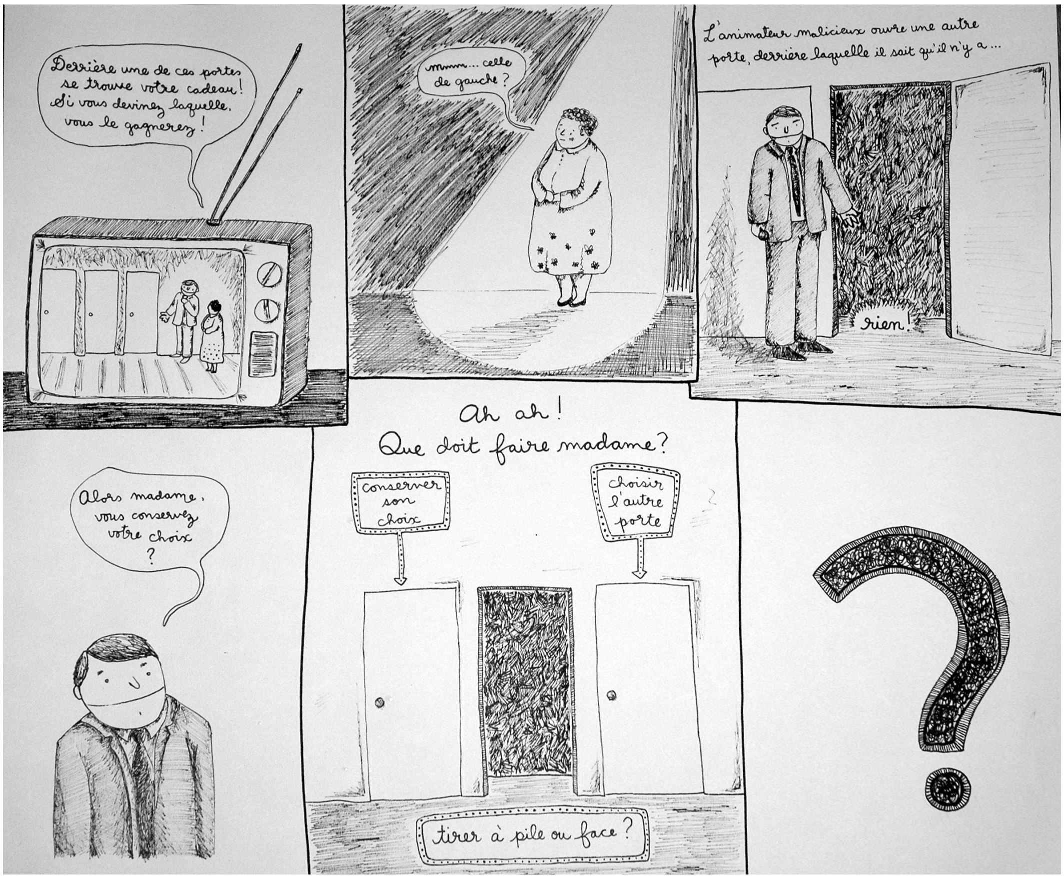
EXERCICE 4 -
Soit $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ muni de l'équiprobabilité. On définit les événements $A := \{\omega_1, \omega_2\}$, $B := \{\omega_1, \omega_3\}$ et $C := \{\omega_2, \omega_3\}$. Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux. Comparer $\mathsf{P}(A \cap B \cap C)$ et $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$.

EXERCICE 5 -
L'exercice suivant est très classique et a de nombreuses variantes. Il illustre l'utilité d'une formulation mathématique rigoureuse pour éviter des pièges et des paradoxes dus à des raisonnements spécieux.
Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'enfant le plus jeune est une fille ? Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'un des enfants est une fille ?

EXERCICE 6 -
Deux machines défectueuses produisent des objets mal usinés. La probabilité qu'un objet soit mal usiné sachant qu'il a été produit par la première (respectivement seconde) machine est $\frac{1}{2}$ (respectivement $\frac{1}{3}$). Un contrôleur de qualité prend au hasard un objet produit par l'une ou l'autre des machines. Quelle est la probabilité pour qu'il ait été produit par la première machine sachant qu'il a été mal usiné ?

EXERCICE 7 -
Il s'agit d'un jeu télévisé. Il y a trois portes (fermées), derrière une porte il y a un cadeau, derrière les deux autres il n'y a rien. Le présentateur télé demande au candidat de choisir une porte. S'il choisit celle où il y a le cadeau il gagne le cadeau, sinon il s'en retourne les mains vides. Le

candidat choisit sa porte. Le présentateur (pour jouer avec les nerfs du candidat) décide d'ouvrir une autre porte, où il sait qu'il n'y a rien. Il redemande alors au candidat de choisir une porte. Quelle est la meilleur stratégie pour le candidat ? Garder sa porte, choisir au hasard une des deux portes restantes (à pile ou face), ou changer de porte ?



EXERCICE 8 -
On considère une usine fabriquant des cartes électroniques. Lors de la production une carte sur 100 000 est défectueuse. En fin de production, on effectue un test pour savoir si la carte est défectueuse ou non. Pour les pièces défectueuses le test est positif dans 95 % des cas, pour les pièces correctes dans 1% des cas.
Le test indique qu'une pièce donnée est défectueuse (test positif). Quelle est la probabilité que la pièce soit effectivement défectueuse ?

Evénements, tribus

EXERCICE 9 -
Montrez qu'une tribu engendrée par une famille finie de parties est engendrée par une partition finie.
1) Décrire tous les éléments de cette tribu.
2) Montrez que ce résultat est faux si on remplace fini par dénombrable. (Utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.)

EXERCICE 10 -**Un exemple d'ensemble non mesurable**
Sur $\mathbb{R}$ on définit la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix (si A

est une fonction sur un ensemble I telle que $A(x) \neq \emptyset$ pour tout x de I, il existe une fonction f telle que $f(x) \in A(x)$ pour tout $x \in I$), construire un ensemble $A \in [0,1[$ qui contient exactement un point de chaque classe d'équivalence. Supposons A mesurable, et soit $\alpha = \lambda(A)$ sa mesure de Lebesgue. Montrer que si $r, s \in \mathbb{Q}$ et $r \neq s$, alors $(A+s) \cap (A+r) = \emptyset$, où $A+x = \{y+x \,:\, y \in A\}$, et que $\lambda(A+s) = \lambda(A)$. Remarquer que

$$1 = \lambda\big([0,1]\big) \leq \lambda\Bigg(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} (A+r) \Bigg) \leq \lambda\big([-1,2]\big) = 3.$$

En utilisant la σ-additivité de λ, montrer que cette inégalité conduit d'une part à $\alpha = 0$, d'autre part à $\alpha > 0$. Conclure.