LOIS CLASSIQUES SUR $\mathbb{R}$

Quelques définitions

Pour une variable aléatoire réelle X, on appelle:

- **fonction de répartition** de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

- **fonction caractéristique** de X la fonction $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(itX)).$$

- **fonction génératrice** de X la fonction $g_X : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right).$$

Lois discrètes

Loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$: $\mathbb{P}(X = i) = 1/n$, pour $i = 1, \ldots, n$.

Correspond au choix au hasard d'un nombre entre 1 et n.
$\mathbb{E}(X) = (n+1)/2$, $\mathbf{Var}(X) = (n^2 - 1)/12$.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ sur $\{0, 1\}$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ où $0 \leq p \leq 1$.

Correspond au résultat du lancer d'une pièce, qui tombe sur pile avec proba p.
$\mathbb{E}(X) = p$, $\mathbf{Var}(X) = p(1-p)$.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ sur $\{1, \ldots, n\}$: $\mathbb{P}(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$, pour $i = 1, \ldots, n$.

Correspond au nombre de pile obtenus pour n lancers indépendants de la pièce précédente.
$\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbf{Var}(X) = np(1-p)$.

Loi géomètrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X = i) = (1-p)p^i$ pour $i \in \mathbb{N}$ et $0 < p < 1$

Correspond au nombre de pile obtenus avant le premier face.
$\mathbb{E}(X) = p/(1-p)$, $\mathbf{Var}(X) = p/(1-p)^2$.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ pour $i \in \mathbb{N}$

La loi de Poisson apparaît dans la modélisation des évènements rares, des files d'attentes (réseaux), des répartitions spatialles d'évènements, etc.
$\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbf{Var}(X) = \lambda$.

Lois à densité

Loi uniforme $\mathcal{U}[a,b]$ sur $[a,b]$: densité $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$.

Correspond au choix d'un nombre "au hasard" entre a et b.
$\mathbb{E}(X) = (a+b)/2$, $\mathbf{Var}(X) = (b-a)^2/12$.

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$: densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

La loi exponentielle décrit l'intervalle de temps entre deux évènements en modélisation markovienne. Elle possède la propriété d'absence de mémoire:
$\mathbb{P}(X > a+b | X > a) = \mathbb{P}(X > b)$, pour tout $a, b > 0$.
$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, $\mathbf{Var}(X) = 1/\lambda^2$.

Loi Gaussienne ou normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$): densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Modélisation des erreurs de mesures, décrit les fluctuations autour de la moyenne dans le Théorème Central Limite.
$E(X) = m$, $\mathbf{Var}(X) = \sigma^2$.

Loi gamma $\Gamma(p, \theta)$ de paramètres $p, \theta > 0$: densité

$$f(x) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\theta x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \qquad \text{avec} \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$$

La loi $\Gamma(n/2, 1/2)$ pour n entier, correspond à la loi du χ^2 à n degrés de liberté, très importante en statistique (tests d'hypothèses).
$\mathbb{E}(X) = p/\theta$, $\mathbf{Var}(X) = p/\theta^2$.

Loi beta $B(r, s)$ avec $r, s > 0$: densité

$$\frac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{B(r,s)} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \qquad \text{avec} \qquad B(r,s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

La loi $B(n, 1)$ correspond à la loi du maximum de n variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.
$\mathbb{E}(X) = r/(r+s)$, $\mathbf{Var}(X) = rs/\big((r+s)^2(r+s+1)\big)$.