UNE REMARQUE SUR LA p-RÉTRACTIBILITÉ

par

J.-L. Colliot-Thélène

Soit p un entier. Suivant [**7**], une k-variété géométriquement intègre X est dite p-rétractilement rationnelle s'il existe un ouvert $U \subset \mathbf{P}^n_k$, un k-morphisme $U \to X$ et un k-morphisme de k-variétés intègres $V \to U$ tel que le composé $V \to U \to X$ soit un morphisme dominant génériquement fini de degré premier à p. La variété est dite rétractilement rationnelle si elle est 0-rétractilement rationnelle, i.e. si l'on peut trouver une situation comme ci-dessus avec $V \to X$ birationnel. Sur un corps k infini, il en est ainsi si X est facteur direct d'une k-variété k-rationnelle, i.e. s'il existe une k-variété intègre Y telle que la k-variété $X \times_k Y$ soit k-birationnelle à un espace projectif $\mathbf{P}^n_k$.

Théorème 0.1. — *Soient k un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ une clôture séparable de k et g le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. Si X est une k-variété lisse projective géométriquement connexe qui est p-rétractilement rationnelle pour tout premier p, alors :*

(i) pour tout corps K contenant k, la flèche degré

$$deg_K : CH_0(X_K) \to \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme.

(ii) Pour tout module de cycle de Rost (cf. [**6**]*), et tout entier $i \geq 0$, les applications naturelles $M^i(k) \to M^i_{nr}(k(X)/k)$ sont des isomorphismes.*

(iii) Le module galoisien $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ *est un facteur direct d'un module de permutation.*

Démonstration. — Comme k est de caractéristique zéro, par la résolution des singularités, il existe une k-variété projective et lisse connexe Z k-birationnelle à $\mathbf{P}^n_k$, un k-morphisme propre $p : Z \to X$, une k-variété projective lisse connexe Y et un k-morphisme $f : Y \to Z$ tel que le composé $q := p \circ f : Y \to X$ soit un k-morphisme génériquement fini de degré N premier à p. Comme

f et p sont des morphismes propres, on a des homomorphismes induits $f_* : CH_0(Y) \to CH_0(Z)$, $p_* : CH_0(Z) \to CH_0(X)$, $q_* = CH_0(Y) \to CH_0(X)$. Comme Y et X sont lisses, on a un homomorphisme $q^* : CH_0(X) \to CH_0(Y)$. Des propretés standard des groupes de Chow [**5**] il résulte d'une part que le composé $q_* \circ q^*$ est la multiplication par N sur le groupe de Chow $CH_0(X)$ ([**1**, Lemme 6.2]) d'autre part que la flèche degré est un isomorphisme $deg_k : CH_0(Z) \to \mathbb{Z}$ ([**1**, Prop. 6.3]), plus précisément qu'il existe un k-point $B \in Z(k)$ qui engendre librement $CH_0(Z)$. Notons $A = p(B) \in X(k)$. Pour toute classe $z \in CH_0(X)$ on a donc

$$N.z = q_* \circ q^*(z) = p_* \circ f_*(q^*(z)) = p_*(rB) = rA \in CH_0(X)$$

pour $r \in \mathbb{Z}$ convenable. Ainsi $N.CH_0(X) \subset \mathbb{Z}.A$. Si X est p-rétractilement rationnelle pour tout premier p, alors $CH_0(X) = \mathbb{Z}.A$. Le même argument vaut sur tout corps K contenant k. Ceci établit (i). Que (i) implique (ii) est un résultat connu – Merkurjev [**6**]) l'établit et en donne une réciproque. Que (i) implique (iii) est un théorème établi dans [**4**] (sous l'hypothèse que la caractéristique de k est zéro). □

Remarque 0.2. — Dans [**7**], Merkurjev montre, sur tout corps, que la p-retracte rationalité pour un premier p implique la trivialité de groupes de cohomologie non ramifiés de torsion p-primaire. D'après [**6**], ceci résulte, sous l'hypothèse de caractéristique nulle, de l'énoncé (i) ci-dessus.

L'énoncé suivant a été démontré en toute caractéristique par F. Scavia [**10**], et a motivé la présente note.

Corollaire 0.3. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit T un k-tore algébrique. Si T est p-rétractilement rationnel pour tout premier p, alors il est facteur direct d'une k-variété k-rationnelle, et en particulier est rétractilement rationnel.*

Démonstration. — Soit $T \subset X$ une k-compactification lisse. Notons $\overline{T} = T \times_k \overline{k}$ et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. D'après le théorème, le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un facteur direct d'un module de permutation. La conclusion résulte alors de [**2**, Prop. 6]. Rappelons ici l'argument, dont le principe remonte à Voskresenkiĭ. Si $\hat{T}$ est le module galoisien des caractères de $\overline{T}$, on a une suite exacte de réseaux galoisiens

$$0 \to \hat{T} \to \hat{P} \to \hat{F} \to 0,$$

où $\hat{P} = \mathrm{Div}_{\overline{X} \setminus \overline{T}}(\overline{X})$ est un module de permutation sur les diviseurs irréducibles de $\overline{X}$ à support hors de $\overline{T}$, et $\hat{F} = \mathrm{Pic}(\overline{X})$. On prend la suite de k-tores duale

$$1 \to F \to P \to T \to 1.$$

Cela fait de P un torseur sur T sous le k-tore F. Comme $\hat{F}$ est un facteur direct d'un module de permutation, le k-tore F est un facteur direct d'un k-tore quasi-trivial, et donc (Hilbert 90 et Shapiro) tout torseur sous F est localement trivial pour la topologie de Zariski, en particulier P est k-birationnel à $T \times_k F$. Par ailleurs P est un k-tore quasi-trivial, donc la k-variété sous-jacente est un ouvert d'un espace affine $\mathbb{A}^n_k$. □

On peut consulter [**9**, Thm. 3.14] et [**3**, Prop. 7.4] pour diverses équivalences pour la rétracte rationalité d'un k-tore.

Remarque 0.4. — On devrait essayer d'établir les résultats de cette note en évitant la résolution des singularités. Un argument de correspondances [**8**, Appendice RC] devrait suffire pour établir les résultats " à la torsion p-primaire près" sur un corps de caractéristique $p > 0$.

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène et D. Coray, L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, Compositio Math. **39** no. 3 (1979) 301–332.

[2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4ème série **10** (1977) 175–229.

[3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori ; applicatons, J. Algebra **106** (1987) 148–205.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, Appendice (en allemand) à l'article de S. Gille, Permutation modules and Chow motives of geometrically rational surfaces, J. Algebra **440** (2015) 443–463.

[5] W. Fulton, Intersection theory, Springer-Verlag, Second edition (1998).

[6] A. S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules, J. London Math. Soc. (2) **78** (2008) 51–64.

[7] A. S. Merkurjev. Versal torsors and retracts. http ://www.math.ucla.edu/ merkurev/publicat.htm

[8] N. A. Karpenko et A. S. Merkurjev, On standard norm varieties, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 46 (2013), no. 1, 175–214 (2013).

[9] D. J. Saltman, Retract rational fields and cyclic Galois extensions, Israel J. Math. **47** (1984) 165–215.

[10] F. Scavia, Retract rationality and algebraic tori, https ://arxiv.org/abs/1810.08682v1

---

23 Octobre 2018

J.-L. Colliot-Thélène, Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`