PRINCIPE LOCAL GLOBAL POUR LES ESPACES LINÉAIRES SUR LES INTERSECTIONS DE DEUX QUADRIQUES

par

J.-L. Colliot-Thélène

Résumé. — Dans [JL], Jahnel et Loughran établissent un principe local-global pour l'existence d'espaces linéaires de dimension r dans les intersections complètes lisses de deux quadriques dans un espace projectif de dimension $2r+2$. On établit un tel résultat pour les espaces linéaires de dimension r dans une intersection presque quelconque de deux quadriques dans un espace projectif de dimension $2r+1$ ou $2r+2$.

1. Le théorème

Théorème 1.1. — *Soit k un corps de nombres. Soient n un entier naturel et $f(x_0,\dots,x_n)$ et $g(x_0,\dots,x_n)$ deux formes quadratiques à coefficients dans k. Supposons qu'il existe une forme non singulière dans le pinceau de formes quadratiques $\lambda f+\mu g$. Dans chacun des cas suivants :*
(a) $n=2r+2$,
(b) $n=2r+1$,
la k-variété X définie par $f=g=0$ dans $\mathbf{P}^n_k$ contient un sous-espace linéaire défini sur k de dimension r si et seulement si elle en possède un sur chaque complété k_v de k, pour v parcourant l'ensemble Ω des places de k.

Démonstration. — Soit t une variable. La forme quadratique $q(t):=f+tg$ sur le corps $k(t)$ est par hypothèse non dégénérée. Soit $\delta(t)\in k(t)^\times$ son discriminant.

D'après le théorème d'Amer [**1, 5, 4**], sur tout corps F contenant k, la F-variété $X\times_k F$ contient un F-sous-espace linéaire de dimension r si et seulement si la quadrique dans $\mathbf{P}^n_{F(t)}$ définie par la forme quadratique $q(t)=f+tg$ sur le corps $F(t)$ s'annule sur un espace linéaire de dimension r. Comme la forme quadratique $q(t)$ est non dégénérée, cette dernière propriété équivaut au fait que la forme quadratique $q(t)$ contient en facteur direct la somme orthogonale de $r+1$ facteurs hyperboliques $H =< 1, -1 >$.

Pour $n = 2r+2$, ceci équivaut au fait que la forme quadratique $f+tg$ est isomorphe à la forme quadratique $q_1(t) := (r+1).H \perp< (-1)^{r+1}.\delta(t) >$.

Pour $n = 2r+1$, ceci est équivalent au fait que la forme quadratique $f+tg$ est isomorphe à la forme quadratique $q_2(t) := (r+1).H$.

D'après [**2**, Prop. 1.1], l'application diagonale de groupes de Witt

$$W(k(t)) \to \prod_{v \in \Omega} W(k_v(t))$$

est injective.

Le théorème de simplification de Witt permet de déduire de ce résultat l'énoncé : Si deux formes quadratiques sur $k(t)$ sont isomorphes sur chacun des $k_v(t)$ pour $v \in \Omega$, alors elles sont isomorphes sur $k(t)$.

Ceci achève la démonstration. $\square$

2. Remarques

Remarque 2.1. — Dans [JL], Thm. 1.5, Jahnel et Loughran considèrent le cas où X est une intersection complète lisse de deux quadriques et où $n = 2r+2$. Ils montrent dans ce cas le résultat plus précis : si pour presque toute place v de k, la k-variété $X \times_k k_v$ contient un k_v-espace linéaire de dimension r, alors elle contient un k-espace linéaire de dimension r. Ceci tient au fait que dans leur cas le principe local-global qui est utilisé est : un élément d'un corps de nombres K est un carré si et seulement si il l'est sur presque tout complété de K.

Remarque 2.2. — Dans le cas $n = 2r+1$, si X est une intersection complète lisse de deux quadriques, la dimension maximale d'un sous-espace linéaire contenu dans X est $r-1$ ([**6**, Cor. 2.4]). Le théorème est donc vide dans ce cas. Il n'est intéressant que pour X singulière.

Remarque 2.3. — Comme me le fait observer David Leep, dans le théorème 1.1 on ne peut pas omettre l'hypothèse de non singularité générique dans le pinceau. Soit $C \subset \mathbf{P}^3_{\mathbb{Q}}$ une courbe de genre 1 contre-exemple au principe de Hasse, donnée par un système de deux formes quadratiques

$$q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Les deux formes en 7 variables $Q_1 = q_1(x_1, \ldots, x_4) + x_5x_6$ et $Q_2 = q_2(x_1, \ldots, x_4) + x_5x_7$ s'annulent simultanément sur un espace vectoriel de dimension 3 sur chaque complété de $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$. On le voit en appliquant le théorème d'Amer-Brumer [**1, 4**] à $Q_1 + tQ_2$. Ceci correspond au cas $r = 2$ et $n = 2r + 2 = 6$ du théorème 1.1.

De même, les deux formes en 10 variables $Q_1 = q_1(x_1, \ldots, x_4) + x_5x_6 + x_8x_9$ et $Q_2 = q_2(x_1, \ldots, x_4) + x_5x_7 + x_8x_{10}$ s'annulent sur un espace vectoriel de dimension 5 sur chaque complété de $\mathbb{Q}$, mais pas sur $\mathbb{Q}$. Ceci correspond au cas $r = 4$ et $n = 2r + 1 = 9$ du théorème 1.1.

Références

[1] M. Amer, Quadratische Formen über Funktionenkörpern, Dissertation, Johannes Gutenberg Universität, Mainz 1976.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles, J. reine und angew. Math. **320** (1980) 150–191.

[3] J. Jahnel et D. Loughran, The Hasse principle for lines on Del Pezzo surfaces, http ://arxiv.org/abs/1410.5671

[4] D. Leep, The Amer–Brumer theorem over arbitrary fields, preprint.

[5] A. Pfister, Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology, Cambridge University Press (1995).

[6] M. Reid, The complete intersection of two or more quadrics, Ph.D. thesis, Cambridge, 1972.

19 novembre 2014/24 février 2015

J.-L. Colliot-Thélène, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`