Exposé J.-L. Colliot-Thélène
Lille le 20 octobre 2011
(Journée Douai)

Quelques problèmes locaux-globaux

Soit R un anneau local excellent intègre hensélien. On ne fait pas d'hypothèse sur le corps résiduel. Soit X un schéma intègre régulier. muni d'un morphisme propre $p : X \to Spec(R)$. On suppose la fibre spéciale X_0 de dimension au plus 1. Soit K le corps des fonctions de X.

Soit Ω l'ensemble des valuations discrètes de rang 1 sur K, et pour $v \in \Omega$ soit K_v le complété de K en v.

Dans chacun des cas :

Courbe relative R est un anneau de valuation discrète, et X est de dimension 2.

Désingularisation R est de dimension 2 et p est birationnel.

on se pose les questions suivantes.

(a) *Pour $i \geq 2$ et $n \geq 2$ entier inversible dans R, les applications naturelles*

$$H^i(K, \mu_n^{\otimes i-1}) \to \prod_{v \in \Omega} H^i(K_v, \mu_n^{\otimes i-1})$$

sont-elles injectives ?

[Il y a des contre-exemples avec $i = 1$.]

Dans le cas **Courbe relative**, pour $i = 2$, ceci est établi dans [CTPaSu], Thm. 4.3 (ii).

Dans le cas **Désingularisation**, pour $i = 2$, ceci est essentiellement établi dans [CTOjPa], comme il est expliqué par Yong Hu dans [Hu1], §3, Proof of Thm. 1.1.

(b) *Pour G un K-groupe linéaire connexe, l'application naturelle*

$$H^1(K, G) \to \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, G)$$

est-elle injective ?

Dans le cas **Courbe relative**, dans [CTPaSu] Thm. 4.3 (i), on établit que pour G un K-groupe réductif déployé (en fait sous une hypothèse un peu plus générale) l'application ci-dessus a un noyau trivial.

et plus généralement :

(c) *Soit X/K un espace homogène d'un K-groupe linéaire connexe.*
Si $\prod_{v \in \Omega} X(K_v) \neq \emptyset$, a-t-on $X(K) \neq \emptyset$?

Pour les quadriques lisses de dimension au moins 1, dans le cas **Courbe relative**, lorsque le corps résiduel de R n'est pas de caractéristique 2, ceci est établi dans [CTPaSu], Thm. 3.1.

Pour les quadriques lisses de dimension différente de 4,5,6, dans le cas **Désingularisation**, si de plus le corps résiduel de R est un corps *fini* de caractéristique impaire, ceci est établi par Yong Hu dans [Hu2].

Il est vraisemblable que la question (b) a une réponse négative déjà pour G un K-tore algébrique, mais je n'ai pas trouvé d'exemple. On peut espérer que le noyau de l'application est trivial quand la K-variété sous-jacente à G est K-birationnelle à un espace affine.

Références

[HHK] D. Harbater, J. Hartmann and D. Krashen, Applications of patching to quadratic forms and central simple algebras, Invent. math. **178** (2009) 231–263.

[CTPaOj] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, R. Parimala, Quadratic forms over fraction elds of two-dimensional henselian rings and Brauer groups of related schemes. In: R. Parimala (editor), Algebra, Arithmetic and Geometry, Mumbai, 2000, Part I, Narosa Publishing House, 2002, 185–217.

[CTPaSu] CT-Parimala-Suresh, patching and local-global principles for homgeneous spaces over function fields of p-adic curves, décembre 2009, à paraître dans Commentarii Math. Helv.

[Hu1] Yong HU, Local-global principle for quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian domains, `http://arxiv.org/abs/1010.6038v3`.

[Hu2] Yong HU, Division algebras and quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian domains, `http://arxiv.org/abs/1105.2051v2`.