
DROITES SUR LES HYPERSURFACES CUBIQUES

par

J.-L. Colliot-Thélène

Résumé. — On montre que sur toute hypersurface cubique complexe de dimension au moins 2, le groupe de Chow des cycles de dimension 1 est engendré par les droites. Le cas lisse est un théorème connu. La démonstration ici donnée repose sur un résultat sur les surfaces géométriquement rationnelles sur un corps quelconque (1983), obtenu via la K-théorie algébrique.

Abstract. — Over any complex cubic hypersurface of dimension at least 2, the Chow group of 1-dimensional cycles is spanned by the lines lying on the hypersurface. The smooth case had already been given several other proofs.

1. Introduction

Soit X une variété sur un corps quelconque. On note $CH_i(X)$ le groupe de Chow des cycles de dimension i sur X modulo l'équivalence rationnelle.

Dans cette note, j'établis le théorème suivant (Théorème 3.1), qui était déjà connu dans le cas lisse :

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^n$, avec $n \geq 3$ une hypersurface cubique. Le groupe de Chow $CH_1(X)$ est engendré par les droites contenues dans X .

Commençons par rappeler les résultats établis dans le cas des hypersurfaces cubiques lisses. Pour $n = 3$, c'est un résultat classique. Pour $n = 6$, c'est établi par Paranjape [7, §4]. Celui-ci utilise l'existence d'un \mathbf{P}^2 contenu dans $X \subset \mathbf{P}^6$ pour fibrer $X \subset \mathbf{P}^6$ en quadriques de dimension 2 au-dessus de \mathbf{P}^3 . Paranjape écrit qu'une méthode analogue vaut pour tout $n \geq 6$. Pour tout $n \geq 4$, le théorème est établi par M. Shen [8, Thm. 1.1] par une méthode différente de

Mots clefs. — Hypersurfaces cubiques, groupe de Chow, 1-cycles.

celle de Paranjape. Pour $n \geq 5$, le théorème est aussi un cas particulier d'un résultat de Tian et Zong sur les intersections complètes de Fano [10, Thm. 6.1] dans \mathbf{P}^m de multidegré (d_1, \dots, d_c) avec $d_1 + \dots + d_c \leq m - 1$ (résultat obtenu par encore une autre méthode).

Comme le note déjà Paranjape [7], pour $n \geq 6$, l'énoncé pour X lisse implique que le groupe de Chow $CH_1(X)$ est égal à \mathbb{Z} . En effet le schéma de Fano des droites de X est alors une variété de Fano (lisse, projective, faisceau anticanonique ample), et un théorème bien connu de Campana et de Kollár-Miyaoka-Mori dit que les variétés de Fano sont rationnellement connexes (par chaînes).

Il y a deux ingrédients dans la démonstration du théorème 3.1. Le premier ingrédient est un résultat sur les surfaces projectives lisses géométriquement rationnelles sur les corps de dimension cohomologique 1 ([2], théorème 2.1 ci-dessous), dont la démonstration utilise la K-théorie algébrique (théorème de Merkur'ev et Suslin). Le second ingrédient est classique : c'est la classification des types de surfaces cubiques singulières sur un corps algébriquement clos. La démonstration procède par sections hyperplanes et récurrence sur la dimension. Même pour une hypersurface cubique lisse donnée, elle impose de considérer toutes les hypersurfaces cubiques de dimension un de moins obtenues par section hyperplane, et celles-ci peuvent être singulières.

Dans la récente prépublication, pour $n \geq 4$, M. Shen [9, Thm. 4.1] établit un théorème qui généralise le cas lisse du théorème 3.1 sur un corps de base non nécessairement algébriquement clos, lorsque l'hypersurface cubique contient une droite définie sur ce corps. Le cas $n = 3$ est établi dans [3].

Mis à part les résultats de [2], nous n'utilisons ici que les propriétés les plus simples des groupes de Chow des variétés, telles qu'on les trouve dans le chapitre 1 du livre [5], en particulier la suite de localisation [5, Prop. 1.8] et le comportement dans une fibration en droites affines [5, Prop. 1.9].

Étant donnée une variété X projective sur un corps K , la R-équivalence sur l'ensemble $X(K)$ des points K -rationnels de X est la relation d'équivalence engendrée par la relation élémentaire suivante : deux K -points A et B sont élémentairement liés s'il existe un K -morphisme $f : \mathbf{P}_K^1 \rightarrow X$ tel que A et B soient dans $f(\mathbf{P}^1(K)) \subset X(K)$. Si deux K -points A et B sont R-équivalents, alors $A - B = 0 \in CH_0(X)$.

2. Groupe de Chow des zéro-cycles d'une hypersurface cubique sur un corps de fonctions d'une variable

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de [2, Prop. 4], puisque le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(K, S)$ pour un K -tore S sur un corps K de dimension cohomologique 1 est nul.

Théorème 2.1. — [2, Theorem A (iv)] *Soit K un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique 1. Soit X une K -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Le noyau de l'application degré $deg_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est nul. Si X possède un point rationnel, par exemple si K est un corps C_1 , alors l'application degré*

$$deg_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme. \square

Ce théorème s'applique en particulier aux surfaces cubiques lisses. Étudions maintenant le cas des surfaces cubiques quelconques.

Proposition 2.2. — *Soit K un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique 1. Soit $X \subset \mathbf{P}_K^3$ une surface cubique. Supposons $X(K) \neq \emptyset$, ce qui est le cas si K est C_1 , par exemple si K est un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos. Alors l'application degré*

$$deg_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme toute surface cubique lisse sur un corps algébriquement clos est rationnelle, le cas où X est lisse est un cas particulier du théorème 2.1.

Supposons X singulière. Si $X \subset \mathbf{P}_K^3$ est un cône, tout point fermé de X est rationnellement équivalent à un multiple d'un point K -rationnel du sommet du cône (cet argument vaut sur un corps quelconque).

Si X n'est pas un cône, mais n'est pas géométriquement intègre, alors c'est l'union d'un plan P et d'une quadrique Q géométriquement intègre, leur intersection est une conique C dans \mathbf{P}_K^2 . Toute telle conique possède un point K -rationnel, puisque $cd(K) \leq 1$, et $deg_K : CH_0(C) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Fixons $m \in C(K)$. Tout point fermé du plan P est rationnellement équivalent à un multiple de m . Si la quadrique Q est un cône de sommet $q \in Q(K)$, tout point fermé de Q est rationnellement équivalent à un multiple de q , et m est rationnellement équivalent à q . Si la quadrique Q est lisse, alors elle est K -rationnelle car elle possède un K -point, et $deg_K : CH_0(Q) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme (en fait $Q(K)/R = \{*\}$). On conclut que $deg_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Supposons désormais que la surface cubique $X \subset \mathbf{P}_K^3$ n'est pas un cône et est géométriquement intègre. Elle est alors géométriquement rationnelle. Les diverses singularités possibles ont été analysées depuis longtemps (Schläfli, Cayley, B. Segre, Bruce–Wall [1], Demazure, Coray–Tsfasman [4]).

Si les points singuliers ne sont pas isolés, alors la surface cubique X contient une droite double $D \subset X$, qui est définie sur K . Tout K -point de X hors de D est situé sur une droite définie sur K rencontrant D , à savoir la droite résiduelle de l'intersection avec X du plan défini par D et le K -point. On a donc $X(K)/R = \{*\}$ et $\text{deg}_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Supposons désormais de plus que les points singuliers de X sont isolés.

Si X possède un point singulier K -rationnel, alors $X(K)/R = \{*\}$ [6, Lemme 1.3], sous la simple hypothèse que toute conique sur K possède un point rationnel. On a donc alors $X(L)/R = \{*\}$ pour toute extension finie de corps L/K . Ainsi $\text{deg}_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Supposons dorénavant de plus que l'on a $X_{\text{sing}}(K) = \emptyset$. Soit $f : Y \rightarrow X$ une résolution des singularités. Un argument simple (lemme de Nishimura) montre que l'application induite $Y(K) \rightarrow X(K)$ contient les K -points lisses de X dans son image. Donc $Y(K) \rightarrow X(K)$ est surjectif. Par hypothèse, on a $X(K) \neq \emptyset$. Soient P et Q deux K -points de X . Soient M , resp. N , dans $Y(K)$ d'image P , resp. Q , dans $X(K)$. La K -surface Y est projective, lisse, géométriquement rationnelle. Le théorème 2.1 assure $M - N = 0 \in CH_0(Y)$. Le morphisme propre f induit $f_* : CH_0(Y) \rightarrow CH_0(X)$. On a donc $P - Q = 0 \in CH_0(X)$. Si R est un point fermé de X , de corps résiduel $L = K(R)$, suivant que X_L possède un L -point singulier ou non, l'un des deux arguments ci-dessus garantit $R - M_L = 0 \in CH_0(X_L)$, et donc $\text{deg}_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. \square

Théorème 2.3. — *Soit K un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique 1. Soient $n \geq 3$ et $X \subset \mathbf{P}_K^n$, $n \geq 3$ une hypersurface cubique. Si l'on a $X(K) \neq \emptyset$, par exemple si K est un corps C_1 , l'application degré $\text{deg}_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit O un point K -rationnel et P un point fermé de X , de corps résiduel $L = K(P)$. Sur $X_L \subset \mathbf{P}_L^n$, on dispose d'un point L -rationnel p défini par P et du L -point $q = O_L$. On choisit un espace linéaire $H \subset \mathbf{P}_L^n$ de dimension 3 qui contient p et q . Soit $Y := X_L \cap H$. Si $Y = H$, alors p et q sont R -équivalents sur X_L , donc $p - q = 0 \in CH_0(Y)$. Si $Y \subset H$ est une surface cubique, le théorème précédent assure aussi $p - q = 0 \in CH_0(Y)$ et donc $p - q = 0 \in CH_0(X_L)$. Ainsi $P - [L : K]O = 0 \in CH_0(X)$. \square

Remarque 2.4. — Pour tout corps K qui est C_1 , et tout $n \geq 5$, un argument élémentaire [6, Prop. 1.4] montre que l'on a $X(K)/R = \{*\}$ pour toute hypersurface cubique (lisse ou non), d'où il résulte immédiatement que

$deg_K : CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme [6, Cor. 1.6]. C'est une question ouverte si sur un tel corps K , et déjà sur un corps K de fonctions d'une variable sur le corps des complexes, on a $X(K)/R = \{*\}$ pour toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}_K^n$ pour $n = 3, 4$.

3. Groupe de Chow des 1-cycles d'une hypersurface cubique sur un corps algébriquement clos

Théorème 3.1. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^n$, avec $n \geq 3$, une hypersurface cubique. Le groupe de Chow $CH_1(X)$ est engendré par les droites contenues dans X .*

Démonstration. — On va établir cet énoncé par récurrence sur $n \geq 3$. On commence par établir le cas $n = 3$ par une discussion cas par cas.

Dans un plan \mathbf{P}^2 tout 1-cycle est rationnellement équivalent à un multiple d'une droite. Pour une quadrique $Q \subset \mathbf{P}^3$ non singulière, le groupe de Picard de Q est engendré par les deux classes de génératrices. Si $Y \subset \mathbf{P}^3$ de coordonnées (x, y, z, t) est un cône défini par une équation $f(x, y, z) = 0$, et de sommet p de coordonnées $(0, 0, 0, 1)$, $CH_1(Y) = CH_1(Y \setminus p)$ est engendré par les génératrices du cône. Ceci établit le résultat dans le cas où la surface cubique n'est pas intègre, et aussi dans le cas où c'est un cône.

Supposons donc X intègre et non conique. Si les singularités de X ne sont pas isolées, alors X possède une droite double. On peut alors [1, §2, Case E] trouver des coordonnées homogènes (x, y, z, t) de \mathbf{P}^3 telles que la surface soit donnée soit par l'équation

$$x^2z + y^2t = 0$$

soit par l'équation

$$x^2z + xyt + y^3 = 0.$$

Dans le premier cas, le complémentaire des deux droites $x = y = 0$ et $x = t = 0$, découpées par $x = 0$, est isomorphe au plan affine \mathbf{A}^2 de coordonnées (y, t) . Dans le second cas, le complémentaire de la droite $x = y = 0$ découpée par $x = 0$ est isomorphe au plan affine \mathbf{A}^2 de coordonnées (y, t) . Comme on a $CH_1(\mathbf{A}^2) = 0$, ceci établit que $CH_1(X)$ est engendré par des droites de X .

Sinon, X est normale, et si $f : X' \rightarrow X$ est sa désingularisation minimale, alors X' est une surface de del Pezzo généralisée de degré 3, et les "droites" de X' sont les transformées propres des vraies droites de X . Voir là-dessus [4, Exemple 0.5]. La projection $CH_1(X') \rightarrow CH_1(X)$ est clairement surjective, et le groupe $CH_1(X') = Pic(X')$ est engendré par les "droites" de X' (courbes D lisses de genre zéro avec $(D.D) = -1$ et les "racines irréductibles" (courbes lisses de genre zéro avec $(D.D) = -2$) qui sont des courbes contractées par f sur les points singuliers de X . Donc $CH_1(X)$ est engendré par les vraies droites de $X \subset \mathbf{P}^3$.

Soit $n \geq 4$. Supposons le cas $n - 1$ établi. Soit $X \subset \mathbf{P}^n$ une hypersurface cubique. On trouve dans X une droite D (il en existe sur toute surface cubique sur k algébriquement clos) et on choisit $Q \simeq \mathbf{P}^{n-2} \subset \mathbf{P}^n$ un espace linéaire de dimension $n - 2$ qui ne rencontre pas D et qui n'est pas contenu dans X . On considère le pinceau des espaces linéaires $\mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^n$ qui contiennent Q . On trouve ainsi une variété $Y \subset X \times \mathbf{P}^1$ munie d'un morphisme propre $Y \rightarrow X$ et d'une fibration $Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ dont les fibres au-dessus de k -points $s \in \mathbf{P}^1(k)$ sont des hypersurfaces cubiques $Y_s \subset \mathbf{P}_k^{n-1}$ sections hyperplanes de $X \subset \mathbf{P}_k^n$ (l'hypothèse que X ne contient pas Q garantit qu'aucun Y_s n'est égal à \mathbf{P}_k^{n-1}) et dont la fibre générique est une hypersurface cubique $Y_\eta \subset \mathbf{P}_K^{n-1}$, avec $K = k(\mathbf{P}^1)$. La droite D définit une section de la fibration $Y \rightarrow \mathbf{P}^1$, soit une courbe $M \subset Y$, dont l'image se restreint en un K -point rationnel de Y_η . On dispose de la suite exacte

$$\bigoplus_{s \in \mathbf{P}^1(k)} CH_1(Y_s) \rightarrow CH_1(Y) \rightarrow CH_0(Y_\eta) \rightarrow 0.$$

D'après le théorème 2.3, la classe de M dans $CH_1(Y)$ s'envoie sur un générateur de $CH_0(Y_\eta) \simeq \mathbb{Z}$. L'application $CH_1(Y) \rightarrow CH_1(X)$ est surjective. En effet le morphisme $Y \rightarrow X$ induit un isomorphisme au-dessus du complémentaire du fermé propre $X \cap Q \subset Q$, et au-dessus de chaque point de $X \cap Q$, la fibre est une droite projective. L'image de M est la droite D de X , chaque groupe $CH_1(Y_s)$ est par hypothèse de récurrence engendré par des droites de Y_s , dont les images dans X sont des droites de X . \square

Références

- [1] J. W. Bruce et C.T.C. Wall, On the classification of cubic surfaces, J. London Math. Soc. (2) **19** (1979) 245–256.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène, Hilbert's Theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces, Invent. math. **71** (1983) 1–20.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène et D. Loughran, Normes de droites sur les surfaces cubiques, à paraître dans Pure and Applied Mathematics Quaterly (issue in honour of Prof. Manin's 80th birthday), <https://arxiv.org/abs/1704.05109v2>
- [4] D. Coray et M. Tsfasman, Arithmetic on singular del Pezzo surfaces, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **57**, 25–87 (1988).
- [5] W. Fulton, Intersection Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. **2**, Springer-Verlag (1984).
- [6] D. Madore, Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques de mauvaise réduction, J. Number Theory **128** (2008), no. 4, 926–944.
- [7] K. Paranjape, Cohomological and cycle-theoretic connectivity, Annals of Math. **140** (1994) 641–660.
- [8] Mingmin Shen, On relations among 1-cycles on cubic hypersurfaces, J. Alg. Geometry **23** (2014) 539–569.

- [9] Mingmin Shen, Rationality, universal generation and the integral Hodge conjecture, <https://arxiv.org/abs/1602.07331v2>
- [10] Zhiyu Tian et Hong R. Zong, One-cycles on rationally connected varieties. *Compositio Math.* **150**, no. 3 (2014) 396–408.

soumis le 10 avril 2018

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS,
Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France • *E-mail* : jlct@math.u-psud.fr