

Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann)

J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A.N. Skorobogatov

16 mai 2003

L'objet de cette note est de donner une preuve combinatoire de l'existence d'une compactification équivariante lisse d'un tore sur un corps quelconque. Ce résultat est bien connu et est régulièrement utilisé, mais il est difficile d'en trouver dans la littérature une démonstration complète détaillée (notamment en ce qui concerne le caractère projectif des compactifications construites). En particulier, comme l'a remarqué A.S. Merkurjev en 1996, le début de la preuve du Lemme 3 de l'article [Bry79] utilise un résultat erroné de [Bry77] (en bas de la page 278).¹ L'origine du présent travail est une communication privée de K. Künnemann (1998) qui explique comment on peut raffiner la méthode de Brylinski [Bry79] pour obtenir le résultat. Nous suivrons cette approche. Quitte à prendre un modèle en caractéristique zéro, on peut également établir le Théorème 1 et le Corollaire 1 ci-dessous en utilisant la résolution canonique des singularités de Bierstone et Milman ([BM], [EV]) ou les résultats (basés sur les propriétés des subdivisions barycentriques) de [AW].²

Notre but est de démontrer le

Théorème 1 *Soient L un réseau et A un éventail projectif de $L_{\mathbf{R}} := L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Soit G un groupe fini d'automorphismes de L . Alors il existe un éventail B de $L_{\mathbf{R}}$ qui est projectif, lisse, invariant par G , et tel que B soit une subdivision de A .*

Pour les notions et propriétés de base sur les variétés toriques, nous renvoyons à [Da] ou [Oda]. Nous appellerons ici *cône* de $L_{\mathbf{R}}$ ce qui dans la

¹Par conséquent, on ne peut pas en général prendre x intérieur à σ dans le Lemme 3 de [Bry79] si certaines faces propres du cône σ sont singulières.

²Pour la projectivité des compactifications, ces auteurs renvoient aux lemmes 1,2, et 3 pages 33 à 35 de [KKMS], lemmes dont les démonstrations sont laissées aux lecteurs...

littérature est appelé cône polyédral rationnel strictement convexe, c'est-à-dire une partie σ de $L_{\mathbf{R}}$ qui ne contient aucune droite et qui peut s'écrire comme l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients ≥ 0 d'une partie finie de L . Une *face* d'un cône σ de $L_{\mathbf{R}}$ est une partie τ de σ telle qu'il existe un élément l du réseau dual $L^* = \text{Hom}(L, \mathbf{Z})$ vérifiant : $l(x) \geq 0$ pour tout x de σ , et τ est l'ensemble des $x \in \sigma$ tels que $l(x) = 0$. Un *éventail* de $L_{\mathbf{R}}$ est un ensemble fini de cônes de $L_{\mathbf{R}}$ qui vérifie les deux propriétés : toute face d'un cône de A est encore dans A , et l'intersection de deux cônes de A est une face de chacun d'eux. Une *subdivision* d'un éventail A est un éventail B tel que : tout cône de B est inclus dans un cône de A , et la réunion des cônes de B est égale à la réunion des cônes de A . Un éventail A de $L_{\mathbf{R}}$ est *complet* si $\bigcup_{\sigma \in A} \sigma = L_{\mathbf{R}}$. Soient $n = \dim L$ et $A^{(r)}$ l'ensemble des cônes de dimension r de A pour tout $r \in \{0, \dots, n\}$.

Rappelons la caractérisation classique suivante des variétés toriques projectives ([Oda], Th. 2.13) :

Proposition 1 *Soit A un éventail complet. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La variété torique associée à A est projective.*
2. *Il existe une famille de formes linéaires $(r_{\sigma})_{\sigma \in A^{(n)}}$ dans $\text{Hom}(L, \mathbf{Q})$, et une fonction $f : L_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ satisfaisant :*

$$f(x) = \min_{\sigma \in A^{(n)}} r_{\sigma}(x) \quad \forall x \in L_{\mathbf{R}}$$

avec $f(x) = r_{\sigma}(x)$ si et seulement si $x \in \sigma$.

3. *Il existe une famille de formes linéaires $(r_{\sigma})_{\sigma \in A}$ dans $\text{Hom}(L, \mathbf{Q})$, et une fonction $f : L_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ satisfaisant :*

$$f(x) = \min_{\sigma \in A} r_{\sigma}(x) \quad \forall x \in L_{\mathbf{R}}$$

avec $f(x) = r_{\sigma}(x)$ si et seulement si $x \in \sigma$.

4. *Il existe une famille de formes linéaires $(r_{\sigma})_{\sigma \in A}$ dans $\text{Hom}(L, \mathbf{Q})$ satisfaisant :*

$$r_{\sigma}(x) \leq r_{\tau}(x) \quad \forall (\sigma, \tau) \in A \times A, \quad \forall x \in \sigma$$

avec égalité si et seulement si $x \in \tau$.

Un tel éventail A est dit *projectif*. Une fonction f vérifiant l'une des propriétés 2 ou 3 s'appelle une fonction *strictement convexe* relativement à A .

Un cône de $L_{\mathbf{R}}$ est un *cône simplicial* s'il est engendré comme cône par des éléments linéairement indépendants de L . Si σ est un cône simplicial engendré comme cône par (e_1, \dots, e_r) (où les e_i sont des éléments primitifs du réseau L), on note M_σ le sous-groupe de L engendré par les e_i et on définit la *multiplicité* m de σ comme l'indice du sous-groupe M_σ dans $L \cap (M_\sigma \otimes \mathbf{Q})$. C'est aussi le volume du paralléloèdre $P_\sigma := \{\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i, 0 \leq \lambda_i < 1\}$ (normalisé par le réseau $L \cap E_\sigma$, où $E_\sigma = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = M_\sigma \otimes \mathbf{R}$). Un cône simplicial est *lisse* s'il est de multiplicité 1, et un éventail A de $L_{\mathbf{R}}$ est dit *lisse* s'il est composé de cônes simpliciaux lisses. C'est équivalent à ce que la variété torique associée à A soit lisse ([Oda], Th. 1.10).

Notons que si un cône simplicial est engendré comme cône par une famille libre $(e_i)_{i \in I}$ de L , alors ses faces sont les cônes engendrés par $(e_j)_{j \in J}$, où J est une partie de I . En particulier toute face d'un cône simplicial lisse est encore lisse.

En corollaire du théorème 1, nous obtenons le résultat annoncé :

Corollaire 1 *Soient k un corps et T un k -tore. Il existe une compactification projective, lisse et équivariante de T sur k .*

Preuve du corollaire 1 à partir du théorème 1 : Soit T un k -tore déployé par une extension finie galoisienne K/k . Soit L le réseau des cocaractères de T , muni de l'action galoisienne de $G := \text{Gal}(K/k)$. On applique le théorème 1 au réseau L en partant d'un éventail projectif A quelconque de $L_{\mathbf{R}}$. On obtient alors un éventail projectif lisse B de $L_{\mathbf{R}}$ qui est invariant par G . Soit $T_K := T \times_k K$. On peut associer ([Da], 5.5) à B une K -variété X' munie d'une action de G , et une immersion ouverte $T_K \hookrightarrow X'$ telle que l'action de T_K sur lui-même s'étende à X' . Comme B est projectif et lisse, la variété torique X' est projective et lisse. On définit alors la compactification projective voulue X de T comme le quotient de X' par l'action de $G = \text{Gal}(K/k)$, ce qui est licite car X' est projective ([Se], V.20). Comme $X' = X \times_k K$ est lisse sur K , il en est de même de X/k .

□

Pour prouver le théorème 1, on commence par un lemme certainement bien connu, mais pour lequel nous n'avons pas trouvé de référence explicite :

Lemme 1 *Soient A et B deux éventails de $L_{\mathbf{R}}$. Désignons par C l'ensemble des $\sigma \cap \tau$ pour $\sigma \in A$, $\tau \in B$. Alors C est un éventail de $L_{\mathbf{R}}$.*

Preuve : On notera σ^\vee le dual d'un cône σ . Rappelons qu'on a $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. Chaque $\sigma \cap \tau$ est un cône polyédral rationnel de $L_{\mathbf{R}}$: en effet si σ (resp. τ) est l'ensemble des x de $L_{\mathbf{R}}$ tels que $l(x) \geq 0$ pour tout $l \in I$ (resp. $l \in J$), où I (resp. J) est une partie finie de L^* , alors $\sigma \cap \tau$ est l'ensemble des x de $L_{\mathbf{R}}$ tels que $l(x) \geq 0$ pour tout $l \in I \cup J$ (On a ainsi montré le fait bien connu que l'intersection de deux cônes de $L_{\mathbf{R}}$ est encore un cône de $L_{\mathbf{R}}$).

D'autre part on a la formule évidente $(\sigma + \tau)^\vee = \sigma^\vee \cap \tau^\vee$; en l'appliquant dans L^* à σ^\vee et τ^\vee , on en tire par dualité $(\sigma \cap \tau)^\vee = \sigma^\vee + \tau^\vee$. Il en résulte qu'une face de $\sigma \cap \tau$ est de la forme $\sigma' \cap \tau'$, où σ' est une face de σ et τ' est une face de τ ; ainsi $\sigma' \in A$ et $\tau' \in B$ donc $\sigma' \cap \tau' \in C$ et toute face d'un cône de C est encore dans C . Montrons enfin que l'intersection de deux cônes $\sigma \cap \tau$ et $\sigma' \cap \tau'$ de C est une face de chacun d'eux. Soit $\sigma'' = \sigma \cap \sigma'$ et $\tau'' = \tau \cap \tau'$. Alors $(\sigma \cap \tau) \cap (\sigma' \cap \tau') = \sigma'' \cap \tau''$. En utilisant la formule $(\sigma \cap \tau)^\vee = \sigma^\vee + \tau^\vee$, on voit que $\sigma'' \cap \tau''$ est une face de $\sigma \cap \tau$ et que c'est aussi une face de $\sigma' \cap \tau'$. \square

On établit maintenant le

Lemme 2 *Soit A un éventail projectif de $L_{\mathbf{R}}$ et G un groupe fini d'automorphismes de L . Alors A admet une subdivision projective et invariante par G .*

Preuve : Soit B l'ensemble des cônes de $L_{\mathbf{R}}$ de la forme $\bigcap_{g \in G} g \cdot \sigma_g$ avec chaque $\sigma_g \in A$ (comme on l'a vu plus haut, l'intersection de deux cônes de $L_{\mathbf{R}}$ est encore un cône de $L_{\mathbf{R}}$). Alors B est un éventail par le lemme 1, et il est clairement invariant par G . Montrons que B est complet. Si $x \in L_{\mathbf{R}}$, il existe (pour tout $g \in G$) un σ_g dans A tel que $g^{-1} \cdot x \in \sigma_g$ car A est complet. On a alors $x \in \bigcap_{g \in G} g \cdot \sigma_g$, d'où la complétude de B . Comme tout cône $\bigcap_{g \in G} g \cdot \sigma_g$ de B est inclus dans le cône σ_e de A (où e désigne l'élément neutre de G), on en déduit en outre que B est une subdivision de A .

Il reste à montrer que B est projectif. Comme A est projectif, on peut trouver une famille $(r_\sigma)_{\sigma \in A}$ de formes linéaires vérifiant la propriété 4 de la Proposition 1. Tout cône τ de B s'écrit $\tau = \bigcap_{g \in G} g \cdot \sigma_g(\tau)$, avec chaque $\sigma_g(\tau) \in A$. Posons alors $s_\tau(x) = \sum_{g \in G} r_{\sigma_g(\tau)}(g^{-1} \cdot x)$. Alors pour tout $\tau' = \bigcap_{g \in G} g \cdot \sigma_g(\tau')$ de B et tout x de τ , on a pour tout g de G : $g^{-1} \cdot x \in \sigma_g(\tau)$ d'où $r_{\sigma_g(\tau)}(g^{-1} \cdot x) \leq r_{\sigma_g(\tau')}(g^{-1} \cdot x)$ avec égalité si et seulement si $g^{-1} \cdot x \in \sigma_g(\tau')$. En sommant on obtient $s_\tau(x) \leq s_{\tau'}(x)$ avec égalité si et seulement si $x \in \tau'$. On en déduit que $(s_\tau)_{\tau \in B}$ est une famille de formes linéaires qui vérifie la propriété 4 de la Proposition 1. Ceci prouve que B est projectif. \square

Si A est un éventail de $L_{\mathbf{R}}$ invariant par G , on appellera *stabilisateur* d'un cône σ de A , et on notera $G_{\sigma} \subset G$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $g.\sigma = \sigma$, et *fixateur* de σ l'ensemble des $g \in G$ tel que g agisse comme l'identité sur les points de σ . La proposition suivante est un léger raffinement du lemme 2 de [Bry79]. L'idée d'introduire la propriété (*) ci-dessous³ nous a été signalée par Künnemann (communication personnelle).

Proposition 2 *Soit A un éventail projectif de $L_{\mathbf{R}}$ invariant par G . Alors il existe une subdivision B de A , invariante par G , projective, formée de cônes simpliciaux, et satisfaisant la propriété (*) suivante :*

(*) *Soient $g \in G$ et $\sigma \in B$ tels que σ et $g.\sigma$ soient faces d'un même cône τ de B . Alors $\sigma = g.\sigma$.*

Remarque 1 La propriété (*) implique en particulier que le stabilisateur de tout cône τ de B est égal à son fixateur. Soit en effet $g \in G$ tel que $g.\tau = \tau$. Alors g transforme toute face de τ en une face de τ . La propriété (*) implique alors que g laisse fixe toute face de τ . Comme g est d'ordre fini, son action sur une face de dimension 1 ne peut être que l'identité. Comme τ est engendré comme cône par ses faces de dimension 1, et que l'action de g est linéaire, g agit par l'identité sur τ .

Preuve de la proposition : Elle se fait en plusieurs étapes. On commence par montrer :

Lemme 3 *Il existe une famille $(x_{\sigma})_{\sigma \in A}$ d'éléments de L vérifiant : x_{σ} est dans l'intérieur du cône σ et $g.x_{\sigma} = x_{g.\sigma}$ pour tous $\sigma \in A$, $g \in G$.*

Remarque 2 Comme x_{σ} est à l'intérieur de σ , il résulte des axiomes des éventails que la demi-droite \mathbf{R}^+x_{σ} détermine σ .

Démonstration : Pour chaque orbite Ω de l'action de G sur A , choisissons un représentant $\sigma_{\Omega} \in \Omega$ et un point intérieur m_{Ω} de σ_{Ω} qui est dans L . Posons $x_{\sigma_{\Omega}} := \sum_{g \in G_{\sigma_{\Omega}}} g.m_{\Omega} \in \sigma_{\Omega}$, puis $x_{\sigma} := g.x_{\sigma_{\Omega}}$ pour tout $\sigma = g.\sigma_{\Omega}$ dans l'orbite Ω de σ_{Ω} . Alors pour tout $\sigma \in \Omega$, le point x_{σ} est un point de $\sigma \cap L$, intérieur à σ . Par construction on a bien $x_{g.\sigma} = g.x_{\sigma}$ pour tout g de G et tout σ de Ω . Ceci étant valable pour toute orbite Ω , le lemme est démontré. □

Soit alors \mathcal{C} l'ensemble des chaînes $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ de cônes de A vérifiant $\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots \supset \sigma_l$, les inclusions étant strictes avec $\dim \sigma_l \geq 1$. On notera

³Cette propriété est en particulier impliquée par celle que l'éventail soit *G-strict* au sens de [AW].

abusivement $\sigma \in \alpha$ pour dire que σ est l'un des σ_i . Soit B l'ensemble des cônes τ_α de $L_{\mathbf{R}}$ engendrés par $(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_l})$, où $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ est dans \mathcal{C} . Montrons alors :

Lemme 4 *Les cônes de B sont des cônes simpliciaux qui vérifient la propriété : $\tau_{\alpha'}$ est une face de τ_α si et seulement si α' est une sous-chaîne de α . On a la formule $\tau_\alpha \cap \tau_{\alpha'} = \tau_\beta$, où β est la chaîne formée des cônes qui appartiennent à $\alpha \cap \alpha'$. L'ensemble B est un éventail de $L_{\mathbf{R}}$ invariant par G .*

Démonstration : L'ensemble B est invariant par G grâce à la propriété $g.x_\sigma = x_{g.\sigma}$ du lemme 3. Pour $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ dans \mathcal{C} , les x_{σ_i} ($1 \leq i \leq l$) sont linéairement indépendants à cause de l'hypothèse que x_σ est intérieur à σ pour tout $\sigma \in A$. Ainsi B est formé de cônes simpliciaux. Comme un cône simplicial τ_α de B est engendré par $(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_l})$, ses faces sont les $\tau_{\alpha'}$, où α' est une sous-chaîne de α .

On en déduit déjà que toute face d'un cône de B est dans B . Pour voir que l'intersection de deux cônes de B est une face de chacun d'eux, montrons la formule : $\tau_\alpha \cap \tau_{\alpha'} = \tau_\beta$, où β est la chaîne formée des cônes qui appartiennent à $\alpha \cap \alpha'$. L'inclusion $\tau_\beta \subset \tau_\alpha \cap \tau_{\alpha'}$ est évidente. Soit $x \neq 0$ dans $\tau_\alpha \cap \tau_{\alpha'}$. Pour montrer que $x \in \tau_\beta$, on peut supposer (quitte à remplacer α et α' respectivement par des sous-chaînes) que dans l'écriture de x comme combinaison linéaire des x_σ , $\sigma \in \alpha$ (resp. $\sigma \in \alpha'$), toutes les composantes sont non nulles. Montrons qu'alors $\alpha = \alpha'$. Posons $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ et $\alpha' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_{l'})$, on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_{\sigma_i} = \sum_{j=1}^{l'} \lambda'_j x_{\sigma'_j}$$

avec $\lambda_i > 0$ pour tout i (resp. $\lambda'_j > 0$ pour tout j). Alors x est intérieur à σ_1 et à σ'_1 , donc $\sigma_1 = \sigma'_1$ et $x_{\sigma_1} = x_{\sigma'_1}$. Si $\lambda_1 \neq \lambda'_1$, par exemple $\lambda_1 > \lambda'_1$, on a

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)x_{\sigma_1} + \lambda_2 x_{\sigma_2} + \dots + \lambda_l x_{\sigma_l} = \lambda'_2 x_{\sigma'_2} + \dots + \lambda'_{l'} x_{\sigma'_{l'}}.$$

Le premier membre est intérieur à $\sigma_1 = \sigma'_1$ et le second membre est nul ou intérieur à σ'_2 : contradiction. Ainsi $\sigma_1 = \sigma'_1$ et $\lambda_1 = \lambda'_1$. Remplaçant x par $x - \lambda_1 x_{\sigma_1} = x - \lambda'_1 x_{\sigma'_1}$, on conclut par récurrence sur l que $l = l'$, $\alpha = \alpha'$ et $\lambda_i = \lambda'_i$ pour tout i . Finalement B est bien un éventail de $L_{\mathbf{R}}$. □

On montre maintenant :

Lemme 5 *L'éventail B est complet et c'est une subdivision de A qui vérifie la propriété (*).*

Démonstration : Si un point y est intérieur à un cône σ d'un éventail, alors σ est la réunion des $(\tau, y) := (\tau + \mathbf{R}_{\geq 0}y)$, où τ décrit les faces de σ de dimension $\dim \sigma - 1$. On en déduit immédiatement par récurrence sur $r \geq 1$ la propriété : pour tout cône σ de A avec $\dim \sigma = r$, et tout $x \in \sigma$, il existe une chaîne strictement décroissante $\sigma_1 = \sigma \supset \sigma_2 \supset \dots \supset \sigma_l$ de cônes de A telle que x appartienne au cône engendré par $(x_\sigma, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_l})$. Comme A est complet, B est complet. Tout cône τ_α de B avec $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ est inclus dans le cône σ_1 de A , donc B est une subdivision de A . La propriété (*) de la proposition résulte de ce que $\tau_{\alpha'}$ est une face de τ_α si et seulement si α' est une sous-chaîne de α (Lemme 4) : en effet $g.\tau_\alpha = \tau_{g.\alpha}$ par définition des x_σ , et dans toute chaîne il y a au plus un élément d'une dimension donnée. \square

Pour finir la preuve de la proposition 2, il reste à montrer que l'éventail B est projectif. Soit $(r_\sigma)_{\sigma \in A}$ une famille de formes linéaires vérifiant la propriété 4 de la Proposition 1. Soient $n = \dim L$ et $\mathcal{C}^{(n)}$ l'ensemble des éléments α de \mathcal{C} tels que τ_α soit de dimension n , c'est-à-dire des α de la forme $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ dans \mathbf{Q} . Pour tout $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ dans $\mathcal{C}^{(n)}$, on définit une forme linéaire $l_\alpha \in \text{Hom}(L, \mathbf{Q})$ par $l_\alpha(x_{\sigma_i}) = \varepsilon^{i+1}$ (en particulier $l_\alpha(x_{\sigma_i}) \leq \varepsilon^2$ si $\varepsilon < 1$). On peut supposer ε tel que $|l_\alpha(x_\sigma)| \leq \varepsilon$ pour tous $\alpha \in \mathcal{C}^{(n)}$, $\sigma \in A$ (il suffit de décomposer chaque x_σ sur chaque base $(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n})$). Posons alors $s_\alpha(x) = r_{\sigma_1}(x) + l_\alpha(x)$ pour tout $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ dans $\mathcal{C}^{(n)}$. Comme la famille (r_σ) vérifie la propriété 4 de la Proposition 1, on a $r_\sigma(x_\sigma) < r_{\sigma'}(x_\sigma)$ dès que σ n'est pas inclus dans σ' (car x_σ est intérieur à σ), et on peut supposer que $r_{\sigma'}(x_\sigma) - r_\sigma(x_\sigma) \geq \sqrt{\varepsilon}$ pour tous σ, σ' de A avec σ non inclus dans σ' . Montrons un lemme :

Lemme 6 *Si ε est assez petit, on a pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathcal{C}^{(n)}$ et pour tout $\sigma \in \alpha$:*

$$s_\alpha(x_\sigma) \leq s_{\alpha'}(x_\sigma)$$

avec égalité si et seulement si $\sigma \in \alpha'$.

Preuve du lemme 6 : Soient $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma, \dots, \sigma_n)$ et $\alpha' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_n)$ dans $\mathcal{C}^{(n)}$. Notons que $r_\sigma(x_\sigma) = f(x_\sigma) = r_{\sigma_1}(x_\sigma)$, où $f(x) := \min_{\sigma \in A} r_\sigma(x)$ est une fonction strictement convexe pour A . Supposons que σ ne soit pas inclus dans σ'_1 . Alors $r_{\sigma_1}(x_\sigma) = r_\sigma(x_\sigma) \leq r_{\sigma'_1}(x_\sigma) - \sqrt{\varepsilon}$, donc pour ε assez petit $s_\alpha(x_\sigma) < s_{\alpha'}(x_\sigma)$ puisque $|l_\alpha(x_\sigma)|$ et $|l_{\alpha'}(x_\sigma)|$ sont $\leq \varepsilon$. Soit maintenant $\sigma \subset \sigma'_1$ avec σ de dimension $n - d$, $d \geq 0$; si $d = 0$, on a $\sigma = \sigma'_1$ d'où $r_{\sigma_1}(x_\sigma) = r_\sigma(x_\sigma) = r_{\sigma'_1}(x_\sigma)$ et $l_\alpha(x_\sigma) = l_{\alpha'}(x_\sigma)$ donc $s_\alpha(x_\sigma) = s_{\alpha'}(x_\sigma)$. Si $d > 0$, écrivons $x_\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\sigma'_i}$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$, et supposons $s_\alpha(x_\sigma) \geq s_{\alpha'}(x_\sigma)$. Montrons que $\lambda_1 = 0$; déjà $\lambda_1 \geq 0$ car $x_\sigma \in \sigma'_1$. D'autre part $r_{\sigma_1}(x_\sigma) =$

$f(x_\sigma) = r_{\sigma'_1}(x_\sigma)$ puisque $\sigma \subset \sigma'_1$ et $\sigma \subset \sigma_1$. Comme $s_\alpha(x_\sigma) \geq s_{\alpha'}(x_\sigma)$, on obtient $l_\alpha(x_\sigma) \geq l_{\alpha'}(x_\sigma)$. Mais $l_\alpha(x_\sigma) = \varepsilon^{d+2}$ et $l_{\alpha'}(x_\sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon^{i+1}$, donc si ε est assez petit, on a $\lambda_1 \leq 0$. Ainsi $\lambda_1 = 0$. On en déduit que $\sigma \subset \sigma'_2$: en effet $x_\sigma = \sum_{i=2}^n \lambda_i x_{\sigma'_i}$, donc x_σ est dans le \mathbf{R} -espace vectoriel E_2 engendré par σ'_2 ; si on n'avait pas $\sigma \subset \sigma'_2$, alors $\sigma \cap E_2$ serait inclus dans le bord de σ et x_σ (qui est intérieur à σ) ne pourrait pas appartenir à E_2 . On montre alors par récurrence sur i que $\lambda_i = 0$ pour $i \leq d$ d'où $\sigma \subset \sigma'_{d+1}$ donc (pour des raisons de dimension) la seule possibilité est $\sigma = \sigma'_{d+1}$, soit $\sigma \in \alpha'$ et $l_\alpha(x_\sigma) = l_{\alpha'}(x_\sigma) = \varepsilon^{d+2}$, puis $s_\alpha(x_\sigma) = s_{\alpha'}(x_\sigma)$. □

Fin de la preuve de la proposition 2 : Posons $g(x) = \min_{\alpha \in \mathcal{C}^{(n)}} s_\alpha(x)$. Soit $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ dans $\mathcal{C}^{(n)}$. D'après le lemme 6, on a pour tout $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\sigma_i}$ ($\lambda_i \geq 0$) de τ_α et tout α' de $\mathcal{C}^{(n)}$:

$$s_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_\alpha(x_{\sigma_i}) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{\alpha'}(x_{\sigma_i}) = s_{\alpha'}(x)$$

avec égalité si et seulement si $\sigma_i \in \alpha'$ pour tout $\lambda_i > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \tau_{\alpha'}$ (rappelons que $\tau_\alpha \cap \tau_{\alpha'} = \tau_\beta$, où β est la chaîne constituée des cônes qui sont dans $\alpha \cap \alpha'$). Il en résulte que la fonction g est strictement convexe relativement à B . □

Le théorème 1 découle alors de la proposition suivante :

Proposition 3 *Soit B un éventail de $L_{\mathbf{R}}$, projectif, invariant par G , formé de cônes simpliciaux et satisfaisant la propriété (*) de la proposition 2. Alors il existe une subdivision C de B avec C projective, invariante par G , et formée de cônes simpliciaux de multiplicité 1.*

Preuve : Soit r la dimension minimale des cônes simpliciaux singuliers de B , et $m > 1$ la multiplicité maximale des cônes simpliciaux de dimension r de B . On va montrer qu'il existe une subdivision B' de B vérifiant encore (*) et satisfaisant la condition suivante : tous les cônes simpliciaux de B' de dimension $< r$ sont lisses, ceux de $(B')^{(r)}$ ont une multiplicité $\leq m$, et le nombre de cônes simpliciaux de $(B')^{(r)}$ de multiplicité m est strictement plus petit que pour B . La proposition en résultera par récurrence.

On utilise d'abord le procédé décrit dans [Da], 8.2 : soit $\sigma \in B^{(r)}$ de multiplicité m ; écrivons σ comme le cône engendré par (e_1, \dots, e_r) , où les e_i sont des éléments primitifs du réseau L , et soit E_σ le \mathbf{R} -espace vectoriel engendré

par (e_1, \dots, e_r) . Alors m est le volume (normalisé par $L \cap E_\sigma$) du paralléloépe $P_\sigma := \{\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i, 0 \leq \lambda_i < 1\}$. L'hypothèse $m > 1$ permet alors de trouver un point $x_0 \neq 0$ dans $L \cap P_\sigma$, soit $x_0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbf{Q}$ et $0 \leq \lambda_i < 1$; en effet le volume du convexe symétrique $Q_\sigma := P_\sigma + (-P_\sigma)$ est $m \cdot 2^r > 2^r$, donc d'après le théorème de Minkowski ([HW], 24.1) Q_σ contient un élément $y_0 \neq 0$ de L , soit $y_0 = \sum_{i=1}^r \mu_i e_i$ avec $\mu_i \in \mathbf{Q}$ et $-1 < \mu_i < 1$. Il suffit alors de prendre $x_0 = y_0 + \sum_{i=1}^r \mu'_i e_i$, avec $\mu'_i = 0$ si $\mu_i \geq 0$ et $\mu'_i = 1$ si $\mu_i < 0$. Si x_0 appartenait à une face propre (engendrée par $(e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$ avec $s < r$) de σ , il serait intérieur à cette face, ce qui contredirait le fait que le volume du paralléloépe associé à $(e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$ est 1. Ainsi x_0 est intérieur à σ .

Le procédé de désingularisation partielle consiste alors à remplacer chaque cône τ qui contient x_0 par la famille des cônes engendrés par (x_0, σ') , où σ' décrit l'ensemble des faces de τ qui ne contiennent pas x_0 ; les cônes τ' qui ne contiennent pas x_0 sont eux inchangés. En particulier tous les cônes de dimension $< r$ sont inchangés (donc restent lisses), et le seul cône de dimension r qui est subdivisé est σ , les autres cônes subdivisés étant les cônes de dimension $> r$ qui contiennent σ , qu'on notera τ_2, \dots, τ_l . Pour tout $\lambda_i \neq 0$, la multiplicité du cône engendré par $(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_r, x_0)$ est $\lambda_i m$ (qui est $< m$) via l'interprétation par le volume car le déterminant de l'application linéaire qui envoie $(e_1, \dots, e_i, \dots, e_r)$ sur $(e_1, \dots, x_0, \dots, e_r)$ est λ_i .

On obtient ainsi un nouvel ensemble B_1 de cônes de $L_{\mathbf{R}}$, obtenu à partir de B en remplaçant les cônes $\tau_1 := \sigma, \tau_2, \dots, \tau_l$ de B chacun par une famille de cônes $(\sigma'_{i,j}, x_0)$, où les $\sigma'_{i,j}$ sont les faces de τ_i qui ne contiennent pas x_0 . Nous pouvons alors définir une nouvelle famille B' (invariante par G) de cônes de $L_{\mathbf{R}}$ à partir de B , en remplaçant chaque cône $g.\tau_i$ (où $g \in G$ et $1 \leq i \leq l$) par la famille $(g.\sigma'_{i,j}, g.x_0)$: cette définition est sans ambiguïté car si $g.\tau_{i_1} = h.\tau_{i_2}$ avec $g, h \in G$, alors $(h^{-1}g).\sigma$ et σ sont deux faces d'un même cône de B , donc (via la propriété $(*)$) $h^{-1}g$ laisse stable σ , puis fixe x_0 (cf. Remarque 1); ainsi les $g.\sigma'_{i_1,j}$ sont exactement les $h.\sigma'_{i_2,j}$. Montrons un lemme :

Lemme 7 *Soient (σ', x_0) et $(\sigma'', g.x_0)$ deux des nouveaux cônes. Alors leur intersection est $\sigma' \cap \sigma''$ si $g.x_0 \neq x_0$. Si $g.x_0 = x_0$, cette intersection est le cône engendré par x_0 et $\sigma' \cap \sigma''$.*

Démonstration : Par hypothèse σ' (resp. σ'') est une face d'un cône τ' (resp. τ'') de B qui contient x_0 (resp. $g.x_0$) avec $x_0 \notin \sigma'$ (resp. $g.x_0 \notin \sigma''$). Comme l'éventail B est projectif, on peut trouver une famille de formes linéaires $(r_\alpha)_{\alpha \in B}$ vérifiant la propriété 4 de la Proposition 1. Considérons en particulier les formes linéaires $r_{\tau'}$ et $r_{\tau''}$, et posons $l = r_{\tau'} - r_{\tau''}$, on a donc : $l \leq 0$ sur τ' , $l \geq 0$ sur τ'' , avec dans chaque cas égalité seulement sur $\tau' \cap \tau''$.

Supposons d'abord $g.x_0 \neq x_0$. Alors $g.\sigma \neq \sigma$ (Remarque 1). Comme B vérifie (*), aucun cône de B ne contient à la fois x_0 et $g.x_0$, sinon il contiendrait σ et $g.\sigma$ parce que x_0 est intérieur à σ . En particulier $x_0 \notin \tau''$ et $g.x_0 \notin \tau'$. Si un élément $x = x' + \lambda x_0$ de (σ', x_0) ($\lambda \geq 0, x' \in \sigma'$) s'écrit aussi $x = x'' + \mu g.x_0$ ($\mu \geq 0, x'' \in \sigma''$), on voit en appliquant l qu'on doit avoir $\lambda = \mu = 0$, d'où le résultat.

Supposons maintenant que $g.x_0 = x_0$. Soit $x = x' + \lambda x_0 = x'' + \mu x_0$, avec par exemple $\lambda \geq \mu \geq 0$ et x', x'' respectivement dans σ', σ'' . Avec les notations ci-dessus, on a maintenant $x_0 \in \tau' \cap \tau''$. En appliquant la forme linéaire l , on obtient $x' \in \tau''$. Comme σ'' est une face de τ'' , il existe une forme linéaire s qui est ≥ 0 sur τ'' , et telle que σ'' soit exactement l'ensemble des points de τ'' où s s'annule. En appliquant alors s à l'égalité $x' + (\lambda - \mu)x_0 = x''$, on obtient $\lambda = \mu$ puisque x' et x_0 sont dans τ'' et $x_0 \notin \sigma''$. Ainsi $x' = x''$ est dans $\sigma' \cap \sigma''$ et on obtient le résultat. □

Il résulte immédiatement du lemme ci-dessus (appliqué à $h.x_0$ pour $h \in G$ arbitraire au lieu de x_0) que l'intersection de deux cônes de B' est une face de chacun d'eux. Comme les faces de $(g.\sigma'_{i,j}, g.x_0)$ sont les $g.\tau$ et les $(g.\tau, g.x_0)$, où τ décrit l'ensemble des faces de $g.\sigma'_{i,j}$ qui ne contiennent pas $g.x_0$, toute face d'un cône de B' est encore dans B' et B' est bien un éventail, qui est une subdivision de B (par définition de B' , la réunion des cônes de B' est $L_{\mathbf{R}}$, et tout cône de B' est inclus dans un cône de B). Tous les cônes de $(B')^{(r)}$ ont alors une multiplicité $\leq m$, et le nombre de cônes de $(B')^{(r)}$ de multiplicité m est strictement plus petit que pour B , les cônes de B' de dimension $< r$ restant lisses.

Montrons que B' vérifie la propriété (*). Si $g.(\sigma', x_0)$ et (σ', x_0) sont deux faces d'un même cône $(\sigma'', h.x_0)$ de B' , alors $x_0 = h.x_0$ sinon le Lemme 7 appliqué à (σ', x_0) et $(\sigma'', h.x_0)$ serait contredit. De même $g.x_0 = h.x_0$. En appliquant alors le Lemme 7 à (σ', x_0) et (σ'', x_0) , on obtient $\sigma' \subset \sigma''$, et de même $g.\sigma' \subset \sigma''$ donc $g.\sigma' = \sigma'$ parce que B vérifie (*). On en déduit que B' vérifie cette même propriété.

Montrons pour finir que B' reste projectif. Pour cela, il suffit de montrer le

Lemme 8 *Soient E un éventail projectif de $L_{\mathbf{R}}$ et $x_0 \neq 0$ dans L . Soit E' l'éventail obtenu à partir de E en remplaçant les cônes τ qui contiennent x_0 par la famille des cônes (x_0, σ') , où σ' décrit la famille des faces de τ qui ne contiennent pas x_0 . Alors E' est projectif.*

Notons que le fait que E' soit bien un éventail découle du Lemme 7.

Preuve du lemme 8 : (Cf. [KKMS], lemme 2 p. 34). Soient f une fonction strictement convexe relativement à E et $(r_\tau)_{\tau \in E}$ des formes linéaires associées. Soit $\varepsilon > 0$ dans \mathbf{Q} . Soient $n = \dim L$ et $E^{(n)}$ l'ensemble des cônes de dimension n de E . Alors les cônes τ de dimension n de E' sont les cônes de $E^{(n)}$ qui ne contiennent pas x_0 et les cônes $\tau = (x_0, \sigma')$ avec σ' face de dimension $n - 1$ (avec $x_0 \notin \sigma'$) d'un cône ρ' de $E^{(n)}$ qui contient x_0 . Dans le premier cas, posons $s_\tau = r_\tau$, et dans le deuxième cas posons $s_\tau = r_{\rho'} + l_{\sigma'}$, où $l_{\sigma'}$ est la forme linéaire qui vaut ε en x_0 et s'annule sur σ' .

Soient τ, τ' deux cônes de dimension n de E' . Il est immédiat via le Lemme 7 (appliqué avec $g = e$) que les formes linéaires s_τ et $s_{\tau'}$ coïncident sur $\tau \cap \tau'$. Soit maintenant x un élément de $L_{\mathbf{R}}$ avec $x \in \tau$ et $x \notin \tau'$, montrons qu'il existe ε_x tel que $s_\tau(x) < s_{\tau'}(x)$ pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_x$.

Si τ et τ' sont dans E , c'est clair parce que f était convexe pour E avec r_τ et $r_{\tau'}$ comme formes linéaires respectivement associées à τ et τ' . Supposons $\tau \in E$ et $\tau' = (x_0, \sigma')$, avec σ' face de dimension $n - 1$ de ρ' , $\rho' \in E^{(n)}$. Alors ou bien $x \notin \rho'$ et $s_\tau(x) = r_\tau(x) < r_{\rho'}(x) + l_{\sigma'}(x)$ pour ε assez petit, ou bien $x \in \tau \cap \rho'$ et $x \notin \sigma'$ donc $x = \lambda x_0 + y$ avec $\lambda > 0$ et $l_{\sigma'}(y) = 0$ d'où $r_\tau(x) = r_{\rho'}(x)$ mais $l_{\sigma'}(x) > 0$ soit $s_\tau(x) < s_{\tau'}(x)$. Si $\tau' \in E$ et $\tau = (x_0, \sigma)$ avec σ face de dimension $n - 1$ de $\rho \in E^{(n)}$, alors $r_\rho(x) < r_{\tau'}(x)$ donc pour ε assez petit, on a encore $s_\tau(x) < s_{\tau'}(x)$.

Si enfin $\tau = (x_0, \sigma)$ et $\tau' = (x_0, \sigma')$, avec σ, σ' respectivement faces de dimension $n - 1$ de $\rho, \rho' \in E^{(n)}$, alors $r_\rho(x) \leq r_{\rho'}(x)$. Si l'inégalité est stricte, on a comme ci-dessus $s_\tau(x) < s_{\tau'}(x)$ pour ε assez petit, sinon $x \in \rho'$. Écrivons $x = \lambda x_0 + y$ avec $\lambda \geq 0$ et $y \in \sigma$ (mais $y \notin \sigma'$). Il suffit alors de prouver que $l_{\sigma'}(y) > 0$. Mais on remarque que $y \in \rho'$ en appliquant la forme linéaire $r_\rho - r_{\rho'}$ (cf. preuve du Lemme 7) qui est nulle sur x et x_0 , donc sur y (qui est dans ρ). Comme $l_{\sigma'}$ a un signe constant sur ρ' (dont σ' est une face) et que sa valeur en x_0 est > 0 , $l_{\sigma'}(y) > 0$ (l'inégalité est stricte car $y \notin \sigma'$).

Soit (x_1, \dots, x_n) une famille qui engendre le cône τ . Pour $\tau \neq \tau'$, l'un au moins des x_i n'est pas dans τ' . Soit $\varepsilon_{\tau, \tau'}$ le plus petit des ε_{x_i} associés comme ci-dessus aux x_i qui ne sont pas dans τ' , et soit enfin ε le plus petit des $\varepsilon_{\tau, \tau'}$ pour les paires $\{\tau, \tau'\}$ (avec $\tau \neq \tau'$) de cônes de $(E')^{(n)}$. Alors pour ce choix de ε , on obtient pour tous τ, τ' de $(E')^{(n)}$ et tout x de τ : $s_\tau(x) \leq s_{\tau'}(x)$ avec égalité si et seulement si $x \in \tau'$.

Finalement on a bien que $g(x) := \min_{\tau \in E^{(n)}} s_\tau(x)$ est une fonction strictement convexe pour E' . □

Remerciements. Nous remercions Klaus Künnemann pour les suggestions qui sont à l'origine de ce travail.

Références

- [AW] D. Abramovich et J. Wang, Equivariant resolution of singularities in characteristic zero. *Math. Res. Lett.* 4 (1997), no. 2-3, 427–433.
- [BM] E. Bierstone et P. Milman, Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant. *Invent. math.* **128** (1997), no. 2, 207–302.
- [Bry77] J.-L. Brylinski, Séminaire sur les singularités des surfaces. Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1976–1977. Edité par M. Demazure, H. C. Pinkham et B. Teissier. *Lecture Notes in Mathematics* **777**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [Bry79] J.-L. Brylinski, Décomposition simpliciale d'un réseau, invariante par un groupe fini d'automorphismes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), no. 2, A137–A139.
- [Da] V.I. Danilov, The geometry of toric varieties. *Russian Math. Surveys* **33** (1978), no. 2, 97–154.
- [EV] S. Encinas et O. Villamayor, A course on constructive desingularization and equivariance, in *Resolution of singularities* (Obergrugl, 1997), 147–227, *Progr. Math.* **181**, Birkhuser, Basel, 2000.
- [HW] G.H. Hardy et E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
- [KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford et B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*. *Lecture Notes in Mathematics* **339**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
- [Oda] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (3), Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Se] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*. Hermann, Paris, 1959.

Jean-Louis Colliot-Thélène
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay FRANCE

colliot@math.u-psud.fr

David Harari
D.M.A., E.N.S.
45 rue d'Ulm
75005 Paris FRANCE
harari@dma.ens.fr

Alexei N. Skorobogatov
Department of Mathematics
Imperial College
180 Queen's Gate
London SW7 2BZ U.K.
a.skorobogatov@ic.ac.uk